高 等 学 校 教 材

常微分方程

第 三 版

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松　编
朱思铭　王寿松　李艳会　修订

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/王高雄等编. -3版. -北京:高等教育出版社,2006.7
ISBN 7-04-019366-3

Ⅰ.常... Ⅱ.王... Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第057643号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 李 蕊 **封面设计** 张申申
责任绘图 黄建英 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 殷 然
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　次	1978年12月第1版
开　本	850×1168　1/32		2006年7月第3版
印　张	14	印　次	2006年7月第1次印刷
字　数	360 000	定　价	19.30元

物料号　19366-00

内 容 提 要

本书是原中山大学数学力学系常微分方程组编《常微分方程》1978 年初版及 1983 年第二版后的新修订版。考虑到二十多年科学技术的发展，除尽量保持原书结构与易学易教的特点外，在教学时数不增加及内容可选的前提下，适当补充应用实例、非线性内容及计算机应用，包括分支、混沌、哈密顿方程、数值解等；并增加数学软件在常微分方程中应用作为附录；同时在绪论中简单介绍了常微分方程的发展历史和在数学中的地位，书后附习题答案及参考文献。

第三版重写了第一、六章，其他各章只作了少量修订。熟悉第二版的老师可仍按原计划讲授，然后再根据情况适当补充新内容。

全书主要内容有：绪论；一阶微分方程的初等解法；一阶微分方程的解的存在定理；高阶微分方程；线性微分方程组；非线性微分方程；一阶线性偏微分方程。此外还有两个附录：边值问题；数学软件在常微分方程中的应用。

本书可作综合大学和师范院校数学与应用数学专业，以及师范专科学校数学系常微分方程课程的教材和各高校数学模型课程的参考资料。



第三版前言

本书的出版经历了中国改革开放的整个时期，一直在重印中，说明本书的编写得到了读者的肯定。全书按教学大纲的要求，较全面地介绍了常微分方程的基本理论和方法，结构合理，讨论详尽，易教易学，有丰富的例子和习题，在处理诸如高阶线性方程和线性方程组等内容时有自己的特色。

在21世纪的新时期中修订本书，我们除保持原来的优点外，将首先以开放的观点处理材料，把常微分方程放在整个数学结构中考虑。除补充了关于常微分方程的发展历史外，在各章节中还适当介绍了有关的其他理论方法，给出有关的参考文献。

虽然常微分方程理论发展已经历几百年，但目前仍在发展中。特别是近三十多年来，在自然科学中，混沌(chaos)现象和孤立子(soliton)的重大发现，便是以微分方程为基础出现的；非线性科学的研究目前仍方兴未艾。为此，我们除在第六章非线性微分方程中介绍稳定性和定性基本理论及其应用外还以简短篇幅补充了分支、混沌、哈密顿方程和孤立子等内容，虽然概念较多，但多用图形、例子说明，不涉及复杂的推导，主要让读者对当今常微分方程的新面貌有一个概略的印象。

目前已进入信息时代，计算机已普及应用。正是由于计算机技术的发展才引发了混沌、孤立子及分形(fractal)等新现象的发现。使用计算机数学软件可大大促进数学包括常微分方程的学习、教学和研究，但考虑到本书仅是常微分方程的入门教材，正文中暂不涉及使用计算机数学软件，而把数学软件在常微分方程中的应用作为附录，附录中介绍了 Mathematica、MATLAB 和 Maple

三种通用的计算机数学语言,并列出应用于常微分方程的典型例子的语言程序供参考。考虑到计算机绘制微分方程积分曲线及轨线图的重要作用,而这依赖于微分方程的数值解(不管方程可积或不可积),因此补充了微分方程数值解内容,使读者能更好地使用数学软件。

目前,大学生数学建模竞赛已经普及,并成为高等院校提高素质教育及教学改革的重要手段,研究生数学建模竞赛也已开展。常微分方程模型是数学模型的基本内容之一,书中适当补充了常微分方程模型的若干例子,也适当增加了研究生入学试题作为习题。

修订部分集中在第一章和第六章,不影响原教学计划,可仍按原计划教学。增加的数值解在第三章最后,是可选内容;数学软件使用是辅助学习,只列入附录,且主要是绘图及计算,教学可用或不用计算机;甚至可将第六章非线性微分方程及附录Ⅱ数学软件在常微分方程中的应用这两部分另行作为选修课的内容。

考虑到书中用到的雅可比矩阵及函数独立性概念在微积分基本教材中不一定涉及,我们在第一章基本概念中附加了雅可比矩阵与函数独立性一段内容供需要时查阅。书中除学习要点外用仿宋体排印的是一些补充材料,初学时略去而不影响后面阅读。另外,可选或作参考部分的节或小节用星号“*”标记于该节号或该小节号之后,而部分证明及补充仍用小字排印。

本书第一版(1978)除第六章和附录外主要参考周之铭编写的已在中山大学使用的讲义编成;第二版(1983)王高雄作了全面修订,并增加编写了第七章;现第三版因周之铭、王高雄在国外,由朱思铭、王寿松、李艳会修订,朱思铭主持。朱思铭重写了第六章,增加了应用实例和常微分方程的发展历史和参考文献,并修订了附录Ⅰ,Ⅱ;王寿松处理了拉普拉斯变换部分,修订了第三、四、五章;李艳会增加了数值解一节及附录Ⅱ数学软件在常微分方程中的应用,修订了第一、二、七章。

本书的修订得到了广大师生的支持，特别是中山大学曾长期从事常微分方程教学的老师，如李尚廉、朱洁华、陈楚平、王远世、赵育林、姜正录、王其如等同志，提出了很多宝贵的建议和意见，对此，我们表示衷心的感谢。

在常微分方程教材中适当引入现代发展的新概念及数学软件是一种新的尝试，虽然仅作为可选内容，只迈出小小的一步，希望能得到兄弟院校广大师生的反馈信息。

由于本次修订时间仓促，未经全体原编者审核，有关错漏与问题由修订者负责。

朱思铭

2006年1月于中山大学康乐园

目　　录

第一章　绪论……………………………………………… 1
§1.1　常微分方程模型　……………………………… 1
§1.2　基本概念和常微分方程的发展历史　………… 16
1.2.1　常微分方程基本概念　……………………… 16
*1.2.2　雅可比矩阵与函数相关性………………… 23
*1.2.3　常微分方程的发展历史　………………… 24
本章学习要点　……………………………………… 28
第二章　一阶微分方程的初等解法　………………… 30
§2.1　变量分离方程与变量变换………………………… 30
2.1.1　变量分离方程　……………………………… 30
2.1.2　可化为变量分离方程的类型………………… 34
2.1.3　应用举例……………………………………… 39
§2.2　线性微分方程与常数变易法　…………………… 44
§2.3　恰当微分方程与积分因子………………………… 50
2.3.1　恰当微分方程　……………………………… 50
2.3.2　积分因子……………………………………… 55
§2.4　一阶隐式微分方程与参数表示　………………… 62
2.4.1　可以解出 y(或 x)的方程　…………………… 62
2.4.2　不显含 y(或 x)的方程……………………… 67
本章学习要点　……………………………………… 70
第三章　一阶微分方程的解的存在定理　…………… 75
§3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法　…………… 76
3.1.1　存在唯一性定理　…………………………… 76

第二版前言

本版是根据高等学校理科1981至1985年教材编写规划和1980年在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会扩大会议上审订的“常微分方程教学大纲”的要求,结合几年来的教学实践,在第一版的基础上修改、补充而成的。除对全书进行全面修改外,重点补充改写了第三章、第五章的若干部分;增添了第七章一阶线性偏微分方程;此外,还充实了各章、节的习题。

本书第一版自1978年出版以来,得到了兄弟院校广大师生的关心和支持,他们为这次修订工作提供了很好的意见,在此谨向这些同志致谢。由于经验和水平的关系,本版一定还有错漏或不完善的地方,热切希望同志们批评指正。

编　者

1982年10月



编者说明

本书是在中山大学数学力学系原《常微分方程讲义》基础上，参考国内外一些同类的教材，经过加工和补充编写而成。全稿是在许淞庆教授主持下，由王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松四位同志分工编写，经过反复讨论、多次修改完成。由于时间匆促，更受科学水平和教学经验的限制，一定存在不少缺点，甚至还有错误之处，恳切希望同志们提出批评和指正。

关于全书各章的主要内容，请参阅各章后面的“学习要点”。下面就我们在编写过程中的几点考虑作些说明。

一、考虑到“常微分方程”不但是数学的基础课，同时也是常微分方程学科本身近代发展方向的重要基础。本书除讲述常微分方程的最基本的从而是比较经典性的传统内容外，在第六章着重介绍微分方程的重要分支——稳定性理论的一般概念和重要结果，其中包括李雅普诺夫第二方法的主要定理及一类控制系统的绝对稳定性问题。同时在第五章讲述线性方程组时，采用了矩阵和向量等工具，为进一步学习这门学科准备某些必要的基础。

二、在编写过程中，力图做到“由浅入深，循序渐进”和“少而精”；注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学。在基本定理的证明中，反复运用皮卡逐步逼近法，希望读者不但了解定理内容，同时要掌握这一证明方法。此外，每章还附“学习要点”，对该章内容加以总结，帮助读者掌握各部分基本内容。我们略去一阶偏微分方程部分，对于奇解则只是简单地介绍它的概念和求法。

三、在加强基本理论教学的同时，注意运算技能的培养和训练。书中各部分内容均配有典型例子，并加以说明。此外，各章、

节还配有相当数量的习题，希望通过做习题这个环节，来帮助培养、提高解题能力和技巧。

四、高阶线性方程和线性方程组完全可以统一起来处理，采用矩阵和向量等工具，使叙述上显得十分方便。但是，我们认为在常系数高阶线性方程的具体求解过程上，不采用先过渡到方程组的办法，而直接应用本书第四章介绍的方法，可能更为简便些。

基于上述的考虑，我们将上述内容分别设章编写：先讲高阶线性方程，后讲一阶线性方程组。在第五章中，关于常系数线性方程组的基解矩阵的计算，我们避免了化矩阵为若尔当型的麻烦，但却不能不用到关于空间的分解等较深的代数知识。有较好的线性代数基础的读者，可以先学习第五章，而将第四章§4.1的结果作为有关定理的直接推论。因此，使用本书时，对第四章和第五章的有关内容，可以灵活处理，根据实际情况进行调整。

五、在内容安排上，我们既考虑到大纲中关于学时的要求，又不完全受其限制。书中某些章节，特别第六章的内容是供选讲用的。这一章的主要定理都给出了证明，有些用小字排印，那是为学有余力的读者而写的。这些内容讲多讲少请任课教师酌定。

六、最后，鉴于工程技术方面对拉普拉斯变换法的需要，除在第四章和第五章的有关部分加以应用外，还在书末配置附录Ⅰ，介绍拉普拉斯变换的基本概念和主要性质。此外，考虑到微分方程边值问题的实际意义，在附录Ⅱ中作为参考资料来介绍。

书末附有各章节习题答案，供读者参考。

本书由南京大学主审，复旦大学、武汉大学、兰州大学参加审查。审稿同志提出许多宝贵意见。这些意见对本书的定稿工作很有帮助。本书修改后，又经主审人何崇佑同志认真复审。在此，我们谨向这些同志表示谢意。

编者于广州中山大学

1978年7月

目　录

第一章　绪论 …… 1

§1.1　常微分方程模型 …… 1

§1.2　基本概念和常微分方程的发展历史 …… 16

1.2.1　常微分方程基本概念 …… 16

*1.2.2　雅可比矩阵与函数相关性 …… 23

*1.2.3　常微分方程的发展历史 …… 24

本章学习要点 …… 28

第二章　一阶微分方程的初等解法 …… 30

§2.1　变量分离方程与变量变换 …… 30

2.1.1　变量分离方程 …… 30

2.1.2　可化为变量分离方程的类型 …… 34

2.1.3　应用举例 …… 39

§2.2　线性微分方程与常数变易法 …… 44

§2.3　恰当微分方程与积分因子 …… 50

2.3.1　恰当微分方程 …… 50

2.3.2　积分因子 …… 55

§2.4　一阶隐式微分方程与参数表示 …… 62

2.4.1　可以解出 y(或 x)的方程 …… 62

2.4.2　不显含 y(或 x)的方程 …… 67

本章学习要点 …… 70

第三章　一阶微分方程的解的存在定理 …… 75

§3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法 …… 76

3.1.1　存在唯一性定理 …… 76

3.1.2 近似计算和误差估计 …… 87
§3.2 解的延拓 …… 89
§3.3 解对初值的连续性和可微性定理 …… 93
3.3.1 解关于初值的对称性 …… 94
3.3.2 解对初值的连续依赖性 …… 94
3.3.3 解对初值的可微性 …… 99
*§3.4 奇解 …… 103
3.4.1 包络和奇解 …… 103
3.4.2 克莱罗微分方程 …… 108
*§3.5 数值解 …… 112
3.5.1 欧拉方法 …… 112
3.5.2 龙格－库塔方法 …… 114
本章学习要点 …… 119
第四章 高阶微分方程 …… 120
§4.1 线性微分方程的一般理论 …… 120
4.1.1 引言 …… 120
4.1.2 齐次线性微分方程的解的性质与结构 …… 121
4.1.3 非齐次线性微分方程与常数变易法 …… 126
§4.2 常系数线性微分方程的解法 …… 133
4.2.1 复值函数与复值解 …… 133
4.2.2 常系数齐次线性微分方程和欧拉方程 …… 136
4.2.3 非齐次线性微分方程·比较系数法与拉普拉斯变换法 …… 144
4.2.4 质点振动 …… 156
§4.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法 …… 166
4.3.1 可降阶的一些方程类型 …… 166
4.3.2 二阶线性微分方程的幂级数解法 …… 173
4.3.3 第二宇宙速度计算 …… 181
本章学习要点 …… 184
第五章 线性微分方程组 …… 186

§5.1 存在唯一性定理 …… 186
5.1.1 记号和定义 …… 186
*5.1.2 存在唯一性定理 …… 194
§5.2 线性微分方程组的一般理论 …… 202
5.2.1 齐次线性微分方程组 …… 202
5.2.2 非齐次线性微分方程组 …… 210
§5.3 常系数线性微分方程组 …… 219
5.3.1 矩阵指数 exp **A** 的定义和性质 …… 219
5.3.2 基解矩阵的计算公式 …… 223
*5.3.3 拉普拉斯变换的应用 …… 240
本章学习要点 …… 246
第六章 非线性微分方程 …… 248
§6.1 稳定性 …… 249
6.1.1 常微分方程组的存在唯一性定理 …… 249
6.1.2 李雅普诺夫稳定性 …… 250
6.1.3 按线性近似决定稳定性 …… 255
§6.2 V 函数方法 …… 262
6.2.1 李雅普诺夫定理 …… 262
6.2.2 二次型 V 函数的构造 …… 271
§6.3 奇点 …… 279
§6.4 极限环和平面图貌 …… 293
6.4.1 极限环 …… 293
6.4.2 平面图貌 …… 301
*§6.5 分支与混沌 …… 309
6.5.1 常微分方程单参数分支 …… 309
6.5.2 Lorenz 方程与混沌 …… 315
*§6.6 哈密顿方程 …… 325
6.6.1 完全可积性 …… 325
6.6.2 KAM 定理和 Mel'nikov 函数 …… 330

6.6.3 孤立子 …………………………………………………… 336
本章学习要点……………………………………………………… 340
第七章 一阶线性偏微分方程………………………………… 342
§7.1 基本概念 ………………………………………………… 342
§7.2 一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系 ………… 344
§7.3 利用首次积分求解常微分方程组 ……………………… 348
§7.4 一阶线性偏微分方程的解法 …………………………… 352
§7.5 柯西问题 ………………………………………………… 362
本章学习要点 ……………………………………………………… 368
附录Ⅰ 边值问题……………………………………………… 370
附录Ⅱ 数学软件在常微分方程中的应用…………………… 389
习题答案………………………………………………………… 408
参考文献………………………………………………………… 428

第一章

绪 论

数学分析(微积分)中研究了变量的各种函数及函数的微分与积分.如函数未知,但知道变量与函数的代数关系式,便组成代数方程,通过求解代数方程解出未知函数.同样,如果知道自变量、未知函数及函数的导数(或微分)组成的关系式,得到的便是**微分方程**,通过求解微分方程求出未知函数.自变量只有一个的微分方程称为**常微分方程**.常微分方程是数学分析或基础数学的一个组成部分,在整个数学大厦中占据着重要位置.

在反映客观现实世界运动过程的量与量之间的关系中,大量存在满足常微分方程关系式的数学模型,需要我们通过求解常微分方程来了解未知函数的性质.常微分方程是解决实际问题的重要工具.

本章中先介绍自然界、社会界中的各种常微分方程模型,了解构造常微分方程模型的几种方法.同时讲述一些微分方程和函数相关性的基本概念及常微分方程发展历史,使读者概略了解常微分方程的历史和在数学中的地位.

§1.1 常微分方程模型

这一节先介绍物理、力学中的常微分方程模型,然后讨论在社会、生物、化学及气象中的常微分方程模型,最后简略介绍力学系

统中的常微分方程，为后面理论学习提供应用例子，同时总结出建立常微分方程模型的几种方法.

例 1 *RLC* 电路.

包含电阻 R、电感 L、电容 C 及电源的电路称为 *RLC* 电路，*RLC* 电路是电子电路的基础. 根据电学知识，电流 I 经过 R, L, C 的电压降分别为 $RI, L\frac{dI}{dt}$ 和 $\frac{Q}{C}$，其中 Q 为电量，它与电流的关系为 $I=\frac{dQ}{dt}$，根据基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律：在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和等于零.

由图(1.1)所示的 *RL* 电路，设 R, L 及电源电压 E 为常数，当开关 S 合上后，存在关系式

$$E-L\frac{dI}{dt}-RI=0,$$

即

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}, \qquad (1.1)$$

图(1.1)

这便是 *RL* 电路的常微分方程. 其中电流 I 是自变量 t 的函数 $I=I(t)$，在方程(1.1)中是未知函数. 当开关 S 刚合上即 $t=0$ 时有 $I=0$，即

$$I(0)=0, \qquad (1.2)$$

称此条件为方程(1.1)的初值条件.

如果当 $t=t_0$ 时有 $I=I_0$，而电源突然短路，即 $E=0$ 且保持不变，此时方程(1.1)变为

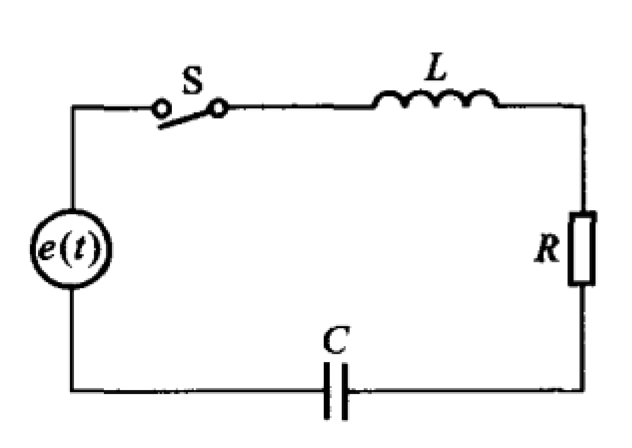
$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0, \qquad (1.3)$$

初值条件为

$$I(t_0)=I_0. \qquad (1.4)$$

再看图(1.2)所示的 *RLC* 电路，假设 R, L, C 为常数，电源电

压 $e(t)$ 是时间 t 的已知函数. 当开关 S 合上时有关系式



图(1.2)

$$e(t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{Q}{C},$$

微分上式,代入 $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$,便得到以时间 t 为自变量、电流 I 为未知函数的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.5}$$

当电源电压是常数 $e(t) = E$ 时,上述微分方程变为

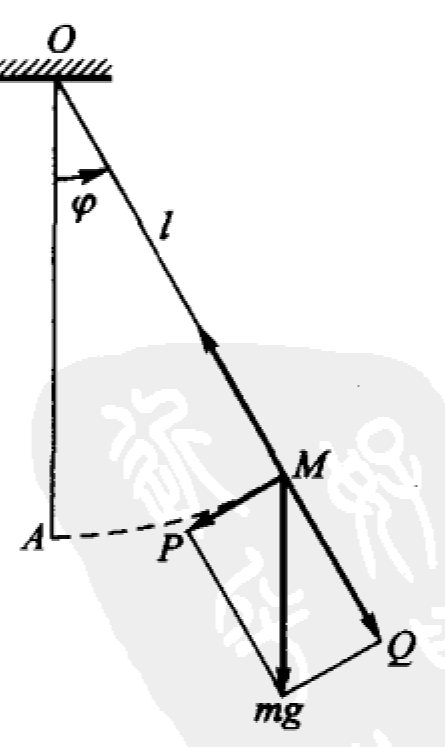
$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{LC} = 0. \tag{1.6}$$

如还有 $R = 0$,微分方程进一步化简为

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{I}{LC} = 0. \tag{1.7}$$

例 2 数学摆.

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M,在重力作用下,它在垂直于地面的平面上沿圆周运动,如图(1.3)所示. 我们来确定摆的运动方程.



图(1.3)

设取反时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向. 质点 M 沿圆周的切向速度 v 可以表示为 $v = l\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. 作用于质点 M 的重力 mg 将摆拉回平衡位置 A. 把重力 mg 分解为两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$,第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿半径 OM 方向,与线的拉力相抵消,它不会引起质点 M 的速度 v 的数值的改变. 第二个分量 $\overrightarrow{MP}$ 沿着圆

周的切线方向，它引起质点 M 的速度 v 的数值的改变. 因为$\overrightarrow{MP}$总是使质点M向着平衡位置A的方向运动，即当角 φ 为正时，向减小 φ 的方向运动；当角 φ 为负时，向增大 φ 的方向运动，所以$\overrightarrow{MP}$的数值等于 $-mg\sin\varphi$. 因此，摆的运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg\sin\varphi,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{1.8}$$

如果只研究摆的微小振动，即当 φ 比较小时的情况，我们可以取 $\sin\varphi$ 的近似值 φ 代入方程(1.8). 这样，就得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.9}$$

如果我们假设摆是在一个粘性的介质中摆动，那么，沿着摆的运动方向就存在一个与速度 v 成比例的阻力. 如果阻力系数是 μ，则摆的运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.10}$$

如果沿着摆的运动方向恒有一个外力 $F(t)$作用于它，这时摆的运动称为强迫微小振动，其方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t). \tag{1.11}$$

当要确定摆的某一个特定的运动时，我们应该给出摆的初始状态：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, \varphi=\varphi_0, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0, \tag{1.12}$$

这里 φ_0代表摆的初始位置，ω_0代表摆的初始角速度的大小.

例 3 人口模型[1]①.

英国人口统计学家马尔萨斯(Malthus)在担任牧师期间,查看了当地教堂 100 多年人口出生统计资料,发现了这样一个现象:人口出生率是一个常数.在 1798 年他发表了《人口原理》一书,其中提出了闻名于世的 Malthus 人口模型.

他的基本假设是:在人口自然增长的过程中,净相对增长率(单位时间内人口的净增长数与人口总数之比)是常数,记此常数为 r(生命系数).

在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内人口数量 $N=N(t)$ 的增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t,$$

于是 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN. \tag{1.13}$$

将上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=r\mathrm{d}t,$$

于是变量 N 和 t 被"分离",两边积分得

$$\ln N=rt+\bar{c},$$

这里 $\bar{c}$ 为任意常数.由对数的定义,上式变为

$$N=c\mathrm{e}^{rt}, \tag{1.14}$$

其中 $c=\mathrm{e}^{\bar{c}}$.因 $N=0$ 亦是方程(1.13)的解,因此 c 可以是任意常数.

如设初值条件为

$$t=t_0\text{时},N(t)=N_0, \tag{1.15}$$

代入上式可得 $c=N_0\mathrm{e}^{-rt_0}$.即方程(1.13)的满足初值条件(1.15)的解为

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)}. \tag{1.16}$$

---

① 为书末参考文献的编号,表示其出处或有关的可参阅的书籍、文章,下同.

如果 $r>0$,上式说明人口总数 $N(t)$将按指数规律无限增长.将 t 以 1 年或 10 年为单位离散化,那么可以说,人口数是以 e^r 为公比的等比数列增加的.

当人口总数不大时,生存空间、资源等极充裕,人口总数指数地增长是可能的.但当人口总数非常大时,指数增长的线性模型则不能反映这样一个事实:环境所提供的条件只能供养一定数量的人口生活,所以 Malthus 模型在 $N(t)$很大时是不合理的.

荷兰生物学家 Verhulst 引入常数 N_m(环境最大容纳量)表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数,并假设净相对增长率为 $r\left(1-\frac{N(t)}{N_m}\right)$,即净相对增长率随 $N(t)$的增加而减少,当 $N(t)\to N_m$时,净增长率$\to 0$.

按此假定,人口增长的方程应改为

$$\frac{dN}{dt}=r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)N, \tag{1.17}$$

这就是 **logistic 模型**.当 N_m与N 相比很大时,$\frac{rN^2}{N_m}$与 rN 相比可以忽略,则模型变为 Malthus 模型;但当 N_m 与 N 相比不是很大时,$\frac{rN^2}{N_m}$这一项就不能忽略,人口急剧增加的速率要缓慢下来.我们用 logistic 模型来预测地球未来人数.某些人口学家估计世界人口的自然增长率为 $r=0.029$,而统计得世界人口在 1960 年为 29.8 亿,增长率为 1.85%,由 logistic 模型(1.17),有 $0.0185=0.029\times\left(1-\frac{29.8\times10^8}{N_m}\right)$,可得 $N_m=82.3\times10^8$,即世界人口容量为 82.3 亿.由(1.17)式右端为二次多项式,以 $N=\frac{N_m}{2}$时为顶点.当 $N<\frac{N_m}{2}$时人口增长率增加;当 $N>\frac{N_m}{2}$时人口增长率减少,即人口增长到$\frac{N_m}{2}=41.15\times10^8$时增长率将逐渐减少.这与世界人口在 20

世纪 70 年代为 40 亿左右时增长率最大的统计结果相符.

例 4 传染病模型[2].

传染病(瘟疫)经常在世界各地流行,如霍乱、天花、艾滋病、SARS、H5N1 病毒等.建立传染病的数学模型,分析其变化规律,防止其蔓延是一项艰巨的任务.这里仅就一般的传染规律讨论传染病的数学模型.

假设传染病传播期间其地区总人数不变,为常数 n.开始时染病人数为 x_0,在时刻 t 的健康人数为 $y(t)$,染病人数为 $x(t)$.由于总人数为常数,有

$$x(t)+y(t)=n. \tag{1.18}$$

设单位时间内一个病人能传染的人数与当时的健康人数成正比,比例常数为 k,称 k 为传染系数,于是

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ky(t)x(t),x(0)=x_0. \tag{1.19}$$

注意到(1.18),得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(n-x),x(0)=x_0, \tag{1.20}$$

这个模型称为 **SI 模型**,即易感染者(Susceptible)和已感染者(Infective)模型.

对无免疫性的传染病如痢疾、伤风等,病人治愈后会再次被感染.设单位时间治愈率为 μ,则方程(1.19)应修正为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ky(t)x(t)-\mu x(t),x(0)=x_0,$$

由(1.18),得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(n-x)-\mu x=kx\left(n-\frac{1}{\sigma}-x\right),x(0)=x_0, \tag{1.21}$$

这个称为 **SIS 模型**.显然 $\frac{1}{\mu}$ 为这个传染病的平均传染期,$\sigma=\frac{k}{\mu}$ 为整个传染期内每个病人有效接触的平均人数(接触数).

对有很强免疫性的传染病如天花、流感等，病人治愈后不会再被感染. 设在时刻 t 的愈后免疫人数为 $r(t)$，称为移出者（Removed），而治愈率 l 为常数，即

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=lx(t).$$

此时，关系式(1.18)和(1.19)应改为

$$x(t)+y(t)+r(t)=n$$

和

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ky(t)x(t)-\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}.$$

由上三式可消去 $r(t)$，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kxy-lx, & x(0)=x_0,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-kxy, & y(0)=y_0=n-x_0,\end{cases}\tag{1.22}$$

这个模型称为 **SIR 模型**.

上述三类传染病模型(1.20)，(1.21)和(1.22)均为常微分方程.

SIR 模型曾被克马克（Kermack）等用于检验本世纪初在印度孟买发生的一次瘟疫，其理论曲线与实际数据相当吻合.

例 5 两生物种群生态模型[3].

意大利生物学家棣安考纳（D'Ancona）发现某海港在第一次世界大战期间捕鱼量减少而捕获到的捕食鱼占的百分比却急剧增加，为解释这种现象，意大利数学家沃特拉（Volterra）建立了一个关于捕食鱼与被食鱼生长情形的数学模型.

沃特拉把所有的鱼分成两类：被食鱼与捕食鱼，设 t 时刻被食鱼的总数为 $x(t)$，而捕食鱼的总数为 $y(t)$. 因为被食鱼所需的食物很丰富，他们本身的竞争并不激烈，如果不存在捕食鱼的话，被食鱼的增加应遵循指数增长率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax$（$a>0$ 为某个常数，表示自

然净相对增长率)，但因捕食鱼的存在，致使其增长率降低，设单位时间内捕食鱼与被食鱼相遇的次数为 bxy($b>0$ 为某个常数)，因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-bxy.$$

类似地，沃特拉认为捕食鱼的自然减少率(因缺少被食鱼)同它们存在数目 y 成正比，即为 $-cy$($c>0$ 为常数)，而自然增长率则同它们本身的存在数目 y 及食物——被食鱼数目 x 成正比，即 dxy($d>0$ 为某个常数，反映被食鱼对捕食鱼的供养能力)，于是得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-by),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-c+dx),\end{cases}$$

上式表示当不存在人类捕鱼活动时，捕食鱼与被食鱼应遵循的规律，称为 **Volterra 被捕食－捕食模型**.

对甲、乙两种群，假设种群甲和乙的数量分别为 x,y，则可用下列方程表示种群甲、乙相互竞争同一资源时的生长情况：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-by),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(c-dx),\end{cases}\tag{1.23}$$

这里系数 a,b,c,d 均是正数，这方程称为两种群**竞争模型**. 当系数 b,d 为负数时，两种群互相促进、互为依赖，这样的方程称为**共生模型**.

更一般的，可用下列的一般方程(统称为 Volterra 模型)表示有相互关系的种群甲、乙的生长情况：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a+bx+cy),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(d+ex+fy),\end{cases}\tag{1.24}$$

其中系数 a,b,c,d,e,f 为常数,可正可负或为 0,视两种群的相互关系而定,一般分竞争、共生、被捕食 - 捕食等类型.就一个种群来说,如 $y=0$ 或 $x=0$ 种群内部存在密度制约关系时即为一维的 Logistic 模型.

更一般的两种群竞争系统可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=M(x,y)x,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=N(x,y)y,\end{cases}\tag{1.25}$$

其中 $M(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 为相对于 x 与 y 的增长率,且当一种群增长时另一种群的增长率下降,同时任一种群过多时两种群都不能增长,只有一种群时,将按极限增长.

前面两种群一般模型(1.24)和(1.25)都是常微分方程.与一维 Logistic 模型不同,模型(1.24)和(1.25)一般是不可积的,无法通过直接求解来了解方程的性态.在第六章中将用定性方法进行讨论.

例 6 Lorenz 方程[4].

气象学家洛伦茨(Lorenz)在美国天气预报中心工作,进行数值天气预报.他在 20 世纪 60 年代初开始用数字计算机,曾简化气象方程组,将大气对流现象化为 14 个变量,最后减到 12 个变量.他对 12 个变量的微分方程组用数字计算机进行模拟计算,一小时能计算两个月的天气变化.一次偶然离开后回来时发现计算结果突然变化,重新输入计算结果又不同.反复检查原因,原来是重新输入数据的小数位尾数误差所引起,从而发现方程的解对初值敏感的现象.后来他访问另一天气中心时,了解到另有人得到了 7 个变量的类似的方程组.经过重新处理,他将其中 4 个变化不大的变量删去,得到仅含 3 个变量的右端非常简单的微分方程组,但其解对初值却异常敏感,他将数值计算结果发表在美国气象学报上,这三个变量的方程就是后来被称为混沌(chaos)现象第一例的有名

的 **Lorenz** 方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(y-x),\\ \dfrac{dy}{dt}=-xz+cx-y,\\ \dfrac{dz}{dt}=xy-bz,\end{cases}\tag{1.26}$$

其中参数 $a=10, b=\dfrac{8}{3}, c=28$.

Lorenz 方程是一个三变量的常微分方程组,对此方程的分析留在§6.5分支与混沌中讨论.

例 7 化学动力学模型[1].

1972 年,化学家 Schlogt 提出了分子反应的化学动力学模型.设想一个化学反应体系内部包含三种化学成分 A,B 和 x. A,B 是反应物,x 为中间产物,进行这样一组化学反应:

$$B \underset{k_1}{\overset{k_0}{\rightleftharpoons}} x, \quad A+2x \underset{k_3}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} 3x$$

即 B 类的一个分子反应后变为 x 类的一个分子;A 类的一个分子与 x 类的两个分子反应后变成 3 个 x 类分子,相应的反应率为 k_0 和 k_2;同时假定反应是可逆的,相应的反应率为 k_1 和 k_3. 此处 k_0,k_1,k_2,k_3 均为正常数;A,B,x 分别代表 A 类、B 类和 x 类的分子数.

假定反应过程不涉及任何热效应,所有成分组成一个理想溶液,反应动力学满足质量作用定律,于是由反应引起的各组成成分浓度的变化速率为

$$\begin{aligned}v_A &= -k_2Ax^2+k_3x^3,\\ v_B &= -k_0B+k_1x,\\ v_x &= -v_A-v_B.\end{aligned}$$

当反应的条件是固定时,所有速率系数是恒定的,设除了由于化学反应以外各成分的浓度还可以通过和外界环境的交换而变化,其中成分 i 与外界交换速率为 ω_i. 于是各成分浓度的变化方程为

$$\frac{dA}{dt}=v_A+\omega_A,$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=v_{\mathrm{B}}+\omega_{\mathrm{B}},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_{x}+\omega_{x}.$$

如果只有成分 A 和成分 B 可以和外界交换，并通过交换而维持它们在体系中的浓度恒定，成分 x 并不能和外界交换，它的浓度完全决定于体系内部的动力学，则有

$$\omega_{x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=0.$$

在这种情况下，体系的状态仅由单个变量 x 来表征，并有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-k_{3}x^{3}+k_{2}Ax^{2}-k_{1}x+k_{0}B, \tag{1.27}$$

这便是 **Schlogt 单分子化学动力学模型**.

考虑有两个中间变量的化学反应体系

$$A+x\xrightarrow{k_1}2x,$$

$$x+y\xrightarrow{k_2}2y,$$

$$y\xrightarrow{k_3}E,$$

但这些反应步骤的总效果是

$$A\xrightarrow{k}E,$$

其中 A 和 E 是反应物和产物，假定它们的浓度可由外界控制为恒定，x 和 y 是两种反应中间产物，它们的浓度可以自由发展，逆反应过程可以完全忽略（自催化），则有反应方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k_{1}Ax-k_{2}xy,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k_{2}xy-k_{3}y,\end{cases} \tag{1.28}$$

这是一类**双分子化学动力学模型**.

现设一开放的体系中进行着下面一系列化学反应：

$$A\xrightarrow{k_1}x,\qquad B+x\xrightarrow{k_2}y+D,$$

$$2x+y\xrightarrow{k_3}3x,\quad x\xrightarrow{k_4}E.$$

假定反应过程是恒定和均匀的，产物 D,E 一经产生即可除去，反应物浓度

很高，无扩散，此时对 x 和 y 的反应动力学方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k_1A-(k_2B+k_4)x+k_3x^2y,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k_2Bx-k_3x^2y.\end{cases}$$

通过变换上式可简化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A-(B+1)x+x^2y,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Bx-x^2y,\end{cases}\tag{1.29}$$

上式是**3 分子化学动力学模型**.

上面 1,2,3 分子的化学反应模型均为常微分方程，其中 1,2 分子模型可直接求解，但一般 3 分子模型无法直接求解，对它们的分析放在第六章.

例 8 力学系统中的常微分方程模型[5].

常微分方程的发现是由对自然科学物理现象的研究发展起来的. 力学体系可分三大类：牛顿力学、拉格朗日力学和哈密顿力学，它们和常微分方程均有密切关系.

牛顿力学研究质点在三维欧氏空间中的运动，一个有势的牛顿力学系可以用质点的质量和力学系统的位能表达出来，牛顿运动方程使我们能完全解出一系列重要的力学问题. 对有完整约束的力学系统，可以通过引进广义坐标$(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$解除约束，而从牛顿力学进化为拉格朗日力学. 拉格朗日力学是利用一个拉格朗日函数 $L(q_1,q_2,\cdots,q_i)$ 刻画系统，把力学系统的求解归结为在相应的坐标邻域内求拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

的初值问题的解. 这是一个二阶常微分方程组. 当黑塞(Hess)矩阵 $\boldsymbol{H}(L)\equiv\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial q_j}\right]$非退化时，引进广义速度 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$则可将上式化为一阶方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v},\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{H}(L))^{-1}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}}-\dfrac{\partial^2 L}{\partial\boldsymbol{q}\partial\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}\right).\end{cases}$$

有势的牛顿力学系是拉格朗日力学系的特例,拉格朗日函数即动能与位能之差.拉格朗日的观点可以使我们能完全解决一系列重要的力学问题,包括小振动理论和刚体动力学问题.

进一步,如果我们用广义动量 $\boldsymbol{p}=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$ 代表广义速度 $\boldsymbol{v}$,通过拉格朗日变换

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{p}-L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$

便得到等价于拉格朗日方程的哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\end{cases}\tag{1.30}$$

其中 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 称为哈密顿函数,同样有效地刻画力学系统.哈密顿方程是特殊形状的常微分方程组,有很多好的特性,这将在第六章最后一节中阐述.

拉格朗日力学是哈密顿力学的特例,通过哈密顿力学可以完全解决一系列用其他方法不能解决的力学问题,并可了解复杂力学系运动的一般性质,它在分析力学以外的其他物理领域,如光学、量子力学等,也有重要作用.

从前面的例子大致可以看出微分方程模型的特点是反映客观现实世界中量与量的变化关系,往往与时间有关,是一个动态(力)系统.构造常微分方程的数学模型有如下几种方法:最常用的是从物理、力学等已确定的自然规律出发,考虑其主要因素,忽略次要因素,提炼出状态变量,包括自变量和因变量(未知函数),然后应用相应的规律和实际情况,构造出由自变量、未知函数及其导数的关系式,即相应的微分方程;如果没有直接的已知规律可参考,亦可以利用不同现象可以具有相同的数学模型这一事实,应用类比方法,建立相应模型,例如用电路来模拟某些力学系统或机械系统;此外,还可以根据已发现的数据,通过分析数据的相互关系加上合理的逻辑推理,寻找出相关规律建立相应的模型,例如人口增长的 Malthus 模型和 logistic 模型;最后,还可以根据一定的目的,通过反复试验,寻找出适合要求的模型,例如 Lorenz 模型便是从建立 10 多个变量的大气动力方程进行数值模仿,后来发现存在初

值敏感性，而将不敏感的变量剔除，最后得到简单明了又能说明问题的三变量的 Lorenz 方程，虽然它已不能直接代表原来的气象关系，但却深刻地刻画了混沌现象的本质.

从上述各种类型的例子中不难发现，完全无关的、本质上不同的模型有时可以由同类型的微分方程来描述. 例如反映 RL 电路中电流变化规律的方程(1.1)，(1.3)及人口增长模型(1.13)都可以写成如下方程类型：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = c; \tag{1.31}$$

而 RLC 电路方程(1.5)，(1.6)和数学摆的强迫振动方程(1.11)属于同一类型

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = f(x); \tag{1.32}$$

又 RLC 电路方程(1.7)和数学摆的微小振动方程(1.9)也属于同一类型.

传染病 SIR 模型(1.22)、两种群模型(1.23)和双分子化学动力学模型(1.28)属于同一类型，同时由于右端变量均不含 t，可以将原方程合并为一方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(-c+dx)}{x(a-by)}. \tag{1.33}$$

这样可将自变量为 t 的两个未知函数 $x(t)$，$y(t)$ 的方程变为以 y 或 x 为自变量而另一个为未知函数表示的方程(1.33)求解，然后再将已知的 x，y 的关系式代人其中一个方程，从而得到未知函数与 t 的关系式.

前面只是结合后面学习的需要介绍几个有代表性的常微分方程模型，实际上在数学模型中有各种各样的常微分方程模型，例如糖尿病检测模型、作战模型、交通模型、经济模型以及判别艺术伪造品模型等[6].

§1.2 基本概念和常微分方程的发展历史

自变量、未知函数均为实值的微分方程称为实值微分方程；未知函数取复值或自变量及未知函数均取复值时称为复值微分方程.在本书中只讨论实值微分方程，若无特别声明，均指实变量的实值微分方程.

1.2.1 常微分方程基本概念

(1) 常微分方程和偏微分方程

我们已经知道微分方程就是联系着自变量、未知函数及其导数的关系式.如果在微分方程中，自变量的个数只有一个，我们称这种微分方程为**常微分方程**；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程为**偏微分方程**.

方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t), \tag{1.34}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+t\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{1.35}$$

就是常微分方程的例子，这里 y 是未知函数，t 是自变量.

方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0, \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.37}$$

就是偏微分方程的例子，这里 T 是未知函数，x,y,z,t 都是自变量.方程(1.36)含有三个自变量，而方程(1.37)含有两个自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶数**.例如，方程(1.34)是二阶常微分方程，而方程(1.36)

与(1.37)都是二阶偏微分方程.一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0, \tag{1.38}$$

这里 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$是 $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数,而且一定含有$\frac{d^n y}{dx^n}$;y 是未知函数,x 是自变量.

我们学习的这门课程是常微分方程.今后,我们把常微分方程简称为“微分方程”,有时更简称为“方程”.

(2) 线性和非线性

如果方程(1.38)的左端为 y 及$\frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$的一次有理整式,则称(1.38)为 n **阶线性微分方程**.例如,方程(1.34)是二阶线性微分方程.一般 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x), \tag{1.39}$$

这里 $a_1(x), \cdots, a_n(x), f(x)$是 x 的已知函数.

不是线性方程的方程称为**非线性微分方程**.例如,方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

是二阶非线性微分方程,而方程(1.35)是一阶非线性微分方程.

(3) 解和隐式解

如果函数 $y=\varphi(x)$代入方程(1.38)后,能使它变为恒等式,则称函数 $y=\varphi(x)$为方程(1.38)的**解**.如果关系式$\Phi(x, y)=0$决定的函数 $y=\varphi(x)$是方程(1.38)的解,我们称$\Phi(x, y)=0$ 为方程(1.38)的**隐式解**,隐式解也称为“积分”.例如,一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{1.40}$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$；而关系式

$$x^2+y^2=1 \tag{1.41}$$

就是方程(1.40)的隐式解.为了简单起见,以后我们不把解和隐式解加以区别,统称为方程的解.

(4) 通解和特解

我们把含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为 n 阶方程(1.38)的**通解**.关于解对常数的独立性是指,对 φ 及其 $n-1$ 阶偏导数关于 n 个常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的雅可比行列式不为0(见§1.2.2).同样可以定义方程(1.38)的**隐式通解**,相应地隐式通解也称为"通积分".为了简单起见,以后我们也不把通解和隐式通解加以区别,通称为方程的通解.为了确定微分方程一个特定的解,我们通常给出这个解所必需的条件,这就是所谓的**定解条件**.常见的定解条件是初值条件和边值条件(边值条件见附录Ⅰ).所谓 n 阶微分方程(1.38)的**初值条件**是指如下的 n 个条件:

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时}, y=y_0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)}, \tag{1.42}$$

这里 $x_0,y_0,y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数.初值条件(1.42)有时写为

$$y(x_0)=y_0,\quad \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(x_0)}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)}. \tag{1.43}$$

求微分方程满足定解条件的解,就是所谓**定解问题**.当定解条件为初值条件时,相应的定解问题,就称为**初值问题**.本书主要讨论初值问题,边值问题在附录Ⅰ讨论.

我们把满足初值条件的解称为微分方程的**特解**.初值条件不同,对应的特解也不同.一般来说,特解可以通过初值条件的限制,从通解中确定任意常数而得到.例如,在§1.1的例3中,含有一个任意常数 c 的解

$$N=c\mathrm{e}^{rt} \tag{1.14}$$

就是一阶方程(1.13)的通解;而

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)} \tag{1.16}$$

就是满足初值条件

$$当\ t=t_0时,\quad N(t)=N_0 \tag{1.15}$$

的特解.特解(1.16)可以在通解(1.14)中令 $c=N_0\mathrm{e}^{-rt_0}$ 而得到.

容易验证,二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+4y=0 \tag{1.44}$$

的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{-4x} \tag{1.45}$$

这里 c_1,c_2是任意常数;满足初值条件

$$y(0)=2,\frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}x}=1$$

的特解为

$$y=3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-4x} \tag{1.46}$$

可以在通解(1.45)中求得 $c_1=3,c_2=-1$ 而得到.

(5) 积分曲线和方向场

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1.47}$$

的解 $y=\varphi(x)$表示 Oxy 平面上的一条曲线,称为微分方程的**积分曲线**,而通解 $y=\varphi(x,c)$表示平面上的一族曲线,特解 $\varphi(x_0)=y_0$则为过点(x_0,y_0)的一条积分曲线,积分曲线上过每一点的切线斜率$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$为方程右端$f(x,y)$在该点处的值;反之,如有一条曲线,其上每一点的切线斜率为 $f(x,y)$,则此曲线为积分曲线.

可以用 $f(x,y)$在 Oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段的斜率方向,这样的区域 D 称为方程(1.47)所定义的**方向场**,又称**向量场**.可以用方向场定义相应的微分方程(1.47).

方向场中方向相同的曲线 $f(x,y)=k$ 称为**等倾斜线**或**等斜线**.可以利用取不同 k 值的等倾斜线来判别积分曲线的走向.

(6) 微分方程组

用两个及两个以上的关系式表示的微分方程称为**微分方程组**,如前面例子中的式(1.22)~(1.26),(1.28),(1.29)等均是微分方程组.

习惯将一般 n 阶常微分方程写成为解出最高阶导数的形式

$$z^{(n)}=g(t;z,z',\cdots,z^{(n-1)}), \qquad (1.48)$$

其中 $z^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n}, z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\cdots,z^{(n-1)}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}t^{n-1}}$.如果把 $z,z',\cdots,z^{(n-1)},z^{(n)}$都理解为未知函数,取变换

$$y_1=z,y_2=z',\cdots,y_n=z^{(n-1)},$$

则 n 阶方程(1.48)可以用一阶方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}t}=y_n,\\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t}=g(t;y_1,\cdots,y_n)\end{cases}$$

代替,即可以将高阶微分方程或高阶微分方程组变换为一般的一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t;y_1,\cdots,y_n), \quad i=1,2,\cdots,n$$

或更简单的写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y}), \qquad (1.49)$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix} f_1(t;y_1,\cdots,y_n) \\ f_2(t;y_1,\cdots,y_n) \\ \vdots \\ f_n(t;y_1,\cdots,y_n) \end{bmatrix}.$$

前面提到的线性和非线性,解和隐式解,通解和特解以及积分曲线和方向场等概念同样适合微分方程组.例如,如果存在向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$或 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{c})$代入方程组(1.49)后变成恒等式,则称它们为方程组(1.49)解,这里 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$为向量常数.一般把向量形式的方程组同样称为方程,不严格区分方程和方程组.

(7) 驻定与非驻定,动力系统

如果方程组右端不含自变量 t

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}\in D\subseteq\mathbf{R}^n, \tag{1.50}$$

则称为**驻定(自治)的**,右端含 t 的微分方程组(1.49)称为**非驻定(非自治)的**.

对非驻定微分方程组(1.49),可以引进新的时间 τ,方程组(1.49)可化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y}), \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1, \end{cases}$$

成为 $n+1$ 维空间$(t;\boldsymbol{y})$驻定方程.

驻定微分方程组(1.50)的过 $\boldsymbol{y}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{y})$可以视 t 为参数,有非常好的性质:可看成为 D 到D 的单参数变换群,也就是:如记 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{y})$,令 $\boldsymbol{\Phi}_t(\boldsymbol{y})$为参数 t 的$\boldsymbol{y}\in D$ 的映射(变换),则映射在 D 上满足恒同性 $\boldsymbol{\Phi}_0(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$ 和可加性 $\boldsymbol{\Phi}_{t_1+t_2}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{\Phi}_{t_2}(\boldsymbol{\Phi}_{t_1}(\boldsymbol{y}))$,满足上述性质的映射称为**动力系统**.动力系统有连续和离散两种类型.因此驻定微分方程组可称为**连续**动力系统$\{\boldsymbol{\Phi}_t\mid t\in\mathbf{R}\}$,或称连续动力系统$\{\boldsymbol{\Phi}_t\mid t\in\mathbf{R}\}$为由常

微分方程定义的动力系统. 也可以定义**离散动力系统**：$\{\boldsymbol{\Phi}_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$，这里 $\mathbf{Z}$ 为整数集，例如由驻定差分方程 $y_{n+1}=f(y_n)$ 或驻定微分方程组(1.50)的解 $\boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\varphi}(n;\boldsymbol{y})$ 便构成离散动力系统.

(8) 相空间、奇点和轨线

不含自变量、仅由未知函数组成的空间称为**相空间**. 积分曲线在相空间中的投影称为**轨线**. 对驻定微分方程组(1.50)，方程组 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*$ 表示为相空间中的点，它满足微分方程组，故称为**平衡解**(驻定解、常数解)，又称为**奇点**(平衡点).

对平面一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y),\end{cases}\tag{1.51}$$

其相空间 (x,y) 又称为相平面. 驻定方程的积分曲线有特殊的性质：时间轴 t 的平移不影响方向场，即可以在空间 (x,y,t) 将方程的积分曲线投影到 (x,y) 平面上，方程(1.51)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{g(x,y)}{f(x,y)}\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)},\tag{1.52}$$

其在 Oxy 平面上的积分曲线即为方程组(1.51)轨线. 同样可用 Oxy 平面上方程(1.52)的方向场进行研究，直接在相平面上进行讨论.

可以应用等倾斜线方法确定轨线的方向，其中相平面上满足 $f(x,y)=0$ 的曲线表示轨线的 x 方向变化为 0，称为**垂直等倾斜线**，过曲线的点的轨线的切线垂直于 x 坐标轴；而 $g(x,y)=0$ 的曲线称为**水平等倾斜线**，过曲线上的点的轨线的切线平行于 x 坐标轴. 垂直等倾斜线与水平等倾斜线的交点 (x_0,y_0) 为奇点，方程有解 $x(t)=x_0, y(t)=y_0$. 可以通过垂直等倾斜线与水平等倾斜线在相平面上划分的区域判断轨线的走向，这在第六章中将有较详细的讨论.

*1.2.2 雅可比矩阵与函数相关性

本书将多次涉及函数方程或方程组求解、参数或函数独立与相关等问题,有些在数学分析初等教材中较少提及,这里补充列出有关定义与结论,供需要时查阅.

(1) 雅可比矩阵

对 n 个变元的 m 个函数

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

定义**雅可比矩阵**为

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

当 $n = m$ 时,称雅可比矩阵对应的行列式为**雅可比行列式**,记为 $\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$.

对一个方程 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$,如果在满足方程的点的邻域内,其$\frac{\partial F}{\partial y}$存在、连续且不为零,则存在过该点的有一阶连续偏导数的解 $y = y(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,且

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{F'_{x_k}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}, k = 1, 2, \cdots, n.$$

对 $n + m$ 个变元的 m 个方程 $F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$,如果在满足方程的点的邻域内,其雅可比行列式 $\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}$存在、连续且不为零,则存在过该点的有一阶连续偏导数的解 $y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) (i = 1, 2, \cdots, m)$,且

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_{k-1},x_k,y_{k+1},\cdots,y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}},i,k=1,2,\cdots,m.$$

(2) 函数相关性

设函数 $y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$及其一阶偏导数在某开集 $D\subset\mathbf{R}^n$上连续,如果在 D 内 $f_1,f_2,\cdots,f_m$中的一个函数能表成其余函数的函数,则称它们在 D 内**函数相关**;如果它们在 D 内的任何点的邻域内皆非函数相关,则称它们在 D 内**函数无关**,或称它们**彼此独立**.

如果雅可比矩阵$\dfrac{D(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$在 D 内的任何点上的秩皆小于 m,则 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 函数相关;如秩皆为 m,则 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 函数无关,彼此独立.当 $n=m$ 时,可用雅可比行列式是否为零代替求雅可比矩阵的秩是否等于 m,雅可比行列式不为零时函数彼此独立.

对 n 阶常微分方程组(1.38)的通解 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$,因积分常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是由初值条件 $\varphi(x_0)=y_{01},\cdots,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_{0n}$确定,因此,如在其存在邻域内雅可比行列式有$\dfrac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,c_2,\cdots,c_n)}\neq0$,则 n 个积分常数是独立的.

*1.2.3 常微分方程的发展历史

常微分方程在微积分概念出现后即已出现,对常微分方程的研究可分为几个阶段[7].

发展初期是对具体的常微分方程希望能用初等函数或超越函数表示其解,属于"求通解"时代.莱布尼茨(Leibniz)曾专门研究利用变量变换解决一阶微分方程的求解问题,而欧拉(Euler)则试图用积分因子统一处理,伯努利(Bernoulli)、里卡蒂(Riccati)微分方

程就是在研究初等积分时提出后人以他们的名字命名的方程.

早期的常微分方程的求解热潮被刘维尔(Liouville)于 1841 年证明里卡蒂方程不存在一般的初等解而中断.加上柯西(Cauchy)初值问题的提出,常微分方程从"求通解"转向"求定解"时代.

首先是对常微分方程定解问题包括初值和边值问题的解的存在性、唯一性等解的性质的研究.

其次,针对线性微分方程,特别是二阶线性微分方程,通过专门定义一些特殊函数以求解特殊方程,如贝塞尔(Bessel)函数、勒让德(Legendre)多项式等,这促成了微分方程与(复变)函数论结合产生微分方程解析理论.

同时,由于天文计算的需要促进了常微分方程摄动理论以及小参数、幂级数等近似方法的研究.

19 世纪末,天体力学中的太阳系稳定性问题需研究常微分方程解的大范围性态,从而使常微分方程的研究从"求定解问题"转向"求所有解"的新时代.

首先,庞加莱(Poincaré)创立了定性理论和方法研究常微分方程解的大范围性态.由于希尔伯特(Hilbert)提出 20 世纪 23 个数学问题中关于极限环个数的第 16 问题,大大促进了定性理论的发展.

另一方面李雅普诺夫(Lyapunov)提出的运动稳定性理论,用于解决方程解的初值扰动不影响原方程解的趋向问题,在天文、物理及工程技术中得到广泛应用,先后在前苏联、美国受到极大重视.

同时,伯克霍夫(Birkhoff)在 20 世纪初在动力系统方面开辟了一个新领域,由于拓扑方法的渗入,20 世纪 50 年代后经阿诺德(Arnold)、斯梅尔(Smale)等大数学家的参与而得到蓬勃发展.

除定性、稳定性和动力系统理论外,还有非线性振动理论、摄动与奇异摄动理论及变换群理论在 20 世纪也得到迅速发展.

20 世纪六七十年代以后,常微分方程由于计算机技术的发展

迎来了新的时期，从"求所有解"转入"求特殊解"时代，发现了具有新性质的特殊的解和方程，如混沌(解)、奇异吸引子及孤立子等. 科技和数学界的重大发现是混沌、孤立子和分形，其中混沌、孤立子直接与微分方程有关. 洛伦茨在 20 世纪 60 年代发现了称为 Lorenz 方程的常微分方程，初始敏感的特性导致了混沌现象的发现引起了科学界的巨大震动，斯梅尔称之为"利用牛顿的定律推翻了牛顿决定论"[8]. 孤立子本是物理上有重要意义的偏微分方程的新类型解，但它们往往对应于可积的哈密顿系统的常微分方程，从而引发了对停顿百年的常微分方程可积性的研究热潮.

常微分方程的研究还与其他学科或领域的结合而出现各种新的研究分支，如控制论、种群生态学、分支理论、泛函微分方程、脉冲微分方程、广义微分方程、时标微分方程等.

"300 年来分析是数学里首要的分支，而微分方程又是分析的心脏. 这是初等微积分的天然后继课，又是为了解物理科学的一门最重要的数学，而且在它所产生的较深的问题中，它又是高等分析里大部分思想和理论的根源."塞蒙斯曾如此评价微分方程在数学中的地位[9].

常微分方程属于数学分析的一支，是数学中与应用密切相关的基础学科，其自身也在不断发展中，学好常微分方程基本理论与方法对进一步学习研究数学理论和实际应用均非常重要.

习题 1.2

1. 指出下面微分方程的阶数，并回答方程是否线性的：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^2-y$;

(2) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+12xy=0$;

(3) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y^2=0$;

(4) $x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=\sin x$;

(5) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$;

(6) $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+e^y=x$.

2. 试验证下面函数均为方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解,这里$\omega>0$是常数:

(1) $y=\cos\omega x$;

(2) $y=c_1\cos\omega x$ (c_1是任意常数);

(3) $y=\sin\omega x$;

(4) $y=c_2\sin\omega x$ (c_2是任意常数);

(5) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ (c_1,c_2是任意常数);

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$ (A,B是任意常数).

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

(1) $y=\frac{\sin x}{x}$, $xy'+y=\cos x$;

(2) $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y'+xy=2x$ (c是任意常数);

(3) $y=ce^x$, $y''-2y'+y=0$ (c是任意常数);

(4) $y=e^x$, $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$;

(5) $y=\sin x$, $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2x-\cos x=0$;

(6) $y=-\frac{1}{x}$, $x^2y'=x^2y^2+xy+1$;

(7) $y=x^2+1$, $y'=y^2-(x^2+1)y+2x$;

(8) $y=-\frac{g(x)}{f(x)}$, $y'=\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}$.

4. 给定一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=2x$,

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点(1,4)的特解;

(3) 求出与直线$y=2x+3$相切的解;

(4) 求出满足条件$\int_0^1 y\,dx=2$的解;

(5) 绘出(2),(3),(4)中的解的图形.

5. 求下列两个微分方程的公共解:

$y'=y^2+2x-x^4$, $y'=2x+x^2+x^4-y-y^2$.

6. 求微分方程 $y' + xy'^2 - y = 0$ 的直线积分曲线.

7. 微分方程 $4x^2y'^2 - y^2 = xy^3$,证明其积分曲线关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线,也是此微分方程的积分曲线.

8. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线上任一点的切线与该点的径向夹角为零;

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l;

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2;

(4) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点等分;

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方;

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项;

(7) 曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

(提示:过点(x,y)的切线的横截距和纵截距分别为 $x - \frac{y}{y'}$ 和 $y - xy'$.)

本章学习要点

本章介绍了三个方面的内容:自然及社会科学中的常微分方程模型、常微分方程基本概念和常微分方程的发展历史.

数学反映了客观现实世界中量与量之间的关系,特别是反映变量、函数及其导数关系的常微分方程,在各类学科中均有广泛的应用.本章只介绍了与后面内容相关的一些模型,只需粗略了解即可,需要时再回头学习.特别是例 7 和例 8 的化学和力学系统模型,专业性较强.

基本概念介绍了常微分方程和偏微分方程、线性和非线性、解和隐式解、通解和特解、方程和方程组、驻定和非驻定、动力系统,以及积分曲线和轨线、方向场、等倾斜线等概念,使读者对常微分方程有一个基本的概念,也为本书以后的学习内容打下了基础,因此要深刻理解.

除常微分方程基本概念外,还列出雅可比矩阵和函数相关性的定义和应用,供需要时查阅.

关于常微分方程的发展历史及其在数学中的地位仅做了简单介绍,使读者了解其全貌和发展过程,也为后面的内容提供参考.

本书仅是常微分方程的基础课程,对常微分方程的近代理论只作初步介绍,若需深入学习,可参阅书末参考文献中的专著[9~20].

第二章

一阶微分方程的初等解法

本章介绍一阶微分方程的初等解法,即把微分方程的求解问题化为积分问题,其解的表达式由初等函数或超越函数表示.如同五次或高于五次的代数方程不能用四则运算求解一样,对于一般的一阶常微分方程也没有通用的初等解法.本章仅介绍若干能有初等解法的方程类型及其求解的一般方法,这是常微分方程发展初期数学家的辛勤成果.这类初等解法,既是常微分方程理论中很有自身特色的部分,也与实际问题密切相关,值得我们好好学习、体会.

§2.1 变量分离方程与变量变换

2.1.1 变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y) \tag{2.1}$$

的方程,称为**变量分离方程**,这里 $f(x)$,$\varphi(y)$分别是 x,y 的连续函数.

如果 $\varphi(y)\neq 0$,我们可将(2.1)改写成

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx,$$

这样，变量就“分离”开来了.两边积分，得到

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + c. \tag{2.2}$$

这里我们把积分常数 c 明确写出来，而把 $\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}$, $\int f(x)\mathrm{d}x$ 分别理解为 $\frac{1}{\varphi(y)}$, $f(x)$ 的原函数.常数 c 的取值必须保证(2.2)有意义，如无特别声明，以后也作这样理解.

把(2.2)理解为 y,x,c 的隐函数关系式 $\Phi(y,x,c)=0$ 或 y 的 x,c 函数关系式 $y=y(x,c)$，微分(2.2)两边，知对任意常数 c，由(2.2)所确定的函数关系式 $y=y(x,c)$ 满足(2.1)，因而(2.2)是(2.1)的通解.

因(2.2)式不适合 $\varphi(y)=0$ 情形.但如果存在 y_0 使 $\varphi(y_0)=0$，则直接验证知 $y=y_0$ 也是(2.1)的解.因此，还必须寻求 $\varphi(y)=0$ 的解 y_0，当 $y=y_0$ 不包括在方程的通解(2.2)中时，必须补上特解 $y=y_0$.

例 1 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$.

解 将变量分离，得到

$$y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x,$$

两边积分，即得

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{c}{2},$$

因而，通解为

$$x^2 + y^2 = c,$$

这里 c 是任意正常数.或者解出 y，写出显函数形式的解

$$y = \pm\sqrt{c - x^2}.$$

例 2 求解 §1.1 中的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(-c+dx)}{x(a-by)}, x \geqslant 0, y \geqslant 0. \tag{1.33}$$

解　方程可变量分离为

$$\left(\frac{c}{x}-d\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{a}{y}+b\right)\mathrm{d}y,$$

积分得

$$c\ln|x|-\mathrm{d}x=-a\ln|y|+by+\overline{k},$$

这里$\overline{k}$为任意常数,上式可化为

$$x^{c}\mathrm{e}^{-dx}y^{a}\mathrm{e}^{-by}=\pm k,$$

其中 $k=\mathrm{e}^{\overline{k}}$. 因方程还有特解 $y=0$. 并考虑到条件 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$,于是方程的通解为

$$x^{c}\mathrm{e}^{-dx}y^{a}\mathrm{e}^{-by}=k,$$

这里 $k\geqslant 0$ 为任意常数.

如果考虑方程的满足初值条件的解,可将初值条件 $t=0$ 时,$x(0)=x_0, y(0)=y_0$,代入得

$$k={x_0}^{c}\mathrm{e}^{-dx_0}{y_0}^{a}\mathrm{e}^{-by_0},$$

即解为

$$x^{c}\mathrm{e}^{-dx}y^{a}\mathrm{e}^{-by}={y_0}^{a}\mathrm{e}^{-by_0}{x_0}^{c}\mathrm{e}^{-dx_0},$$

或写成

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{c}\mathrm{e}^{-d(x-x_0)}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{a}\mathrm{e}^{-b(y-y_0)}=1.$$

例 3　求解人口增长的 logistic 模型

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)N,\quad N(t_0)=N_0,\quad N(t)\geqslant 0.$$

解　同样可以应用变量分离方法并对分式分解化为

$$r\mathrm{d}t=\frac{N_m\mathrm{d}N}{(N_m-N)N}=\frac{\mathrm{d}N}{N}+\frac{\mathrm{d}N}{N_m-N},$$

两边积分之,得

$$rt+\overline{c}=\ln N-\ln(N_m-N),$$

其中$\overline{c}$为任意常数. 化简之

$$\mathrm{e}^{-(rt+\overline{c})}=\frac{N_m}{N}-1,$$

解得

$$N=\frac{N_m}{1+c\mathrm{e}^{-rt}},$$

其中 $c=\mathrm{e}^{-\tilde{c}}$,将初值条件 $t=t_0$时,$N=N_0$,代入得

$$c\mathrm{e}^{-rt_0}=\frac{N_m}{N_0}-1,$$

最后得解
$$N=\frac{N_m}{1+\left(\frac{N_m}{N_0}-1\right)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}}.$$

例 4 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y \tag{2.3}$$

的通解,其中 $P(x)$是 x 的连续函数.

解 将变量分离,得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分,即得

$$\ln|y|=\int P(x)\mathrm{d}x+\tilde{c},$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数.由对数定义,即有

$$|y|=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x+\tilde{c}},$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{\tilde{c}}\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

令 $\pm\mathrm{e}^{\tilde{c}}=c$,得到

$$y=c\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.4}$$

此外,$y=0$ 显然也是(2.3)的解.如果在(2.4)中允许 $c=0$,则 $y=0$ 也就包括在(2.4)中,因而,(2.3)的通解为(2.4),其中 c 是任意常数.

2.1.2 可化为变量分离方程的类型

这里只介绍两种简单的情形.

(1) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.5}$$

的方程,称为**齐次微分方程**,这里 $g(u)$是 u 的连续函数.

作变量变换

$$u=\frac{y}{x}, \tag{2.6}$$

即 $y=ux$,于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u. \tag{2.7}$$

将(2.6),(2.7)代入(2.5),则原方程变为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=g(u),$$

整理后,得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x}. \tag{2.8}$$

方程(2.8)是一个变量分离方程.可按 2.1.1 的方法求解,然后代回原来的变量,便得(2.5)的解.

例 5 求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$.

解 这是齐次微分方程,以$\frac{y}{x}=u$ 及$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$ 代入,则原方程变为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u+\tan u,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\tan u}{x}. \tag{2.9}$$

将上式分离变量，即有

$$\cot u \, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分，得到

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \tilde{c},$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数．整理后，得到

$$\sin u = \pm \mathrm{e}^{\tilde{c}} \cdot x,$$

令 $\pm \mathrm{e}^{\tilde{c}} = c$，得到

$$\sin u = cx. \tag{2.10}$$

此外，方程(2.9)还有解

$$\tan u = 0,$$

即

$$\sin u = 0.$$

如果在(2.10)中允许 $c = 0$，则 $\sin u = 0$ 也就包括在(2.10)中，这就是说，方程(2.9)的通解为(2.10)．

代回原来的变量，得到原方程的通解为

$$\sin \frac{y}{x} = cx.$$

例 6 求解方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\sqrt{xy} = y \quad (x<0)$.

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \quad (x<0),$$

这是齐次微分方程．以 $\frac{y}{x} = u$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$ 代入，则原方程变为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2\sqrt{u}. \tag{2.11}$$

分离变量，得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分,得到(2.11)的通解

$$\sqrt{u}=\ln(-x)+c.$$

即当 $\ln(-x)+c>0$ 时,

$$u=[\ln(-x)+c]^2, \tag{2.12}$$

这里 c 是任意常数.此外,方程(2.11)还有解

$$u=0,$$

注意,此解并不包括在通解(2.12)中.

代回原来的变量,即得原方程的通解为

$$y=x[\ln(-x)+c]^2, \ln(-x)+c>0$$

及 $y=0$.

顺便指出,我们也可将原方程的通解表示为

$$y=\begin{cases} x[\ln(-x)+c]^2, & \ln(-x)+c>0, \\ 0, & \end{cases}$$

它定义于 x 轴的整个负半轴上.

(2) 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \tag{2.13}$$

的方程也可经变量变换化为变量分离方程,这里 a_1,a_2,b_1,b_2, c_1,c_2 均为常数.

我们分三种情形来讨论:

① $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=k$(常数)情形.

这时方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k,$$

有通解

$$y=kx+c,$$

其中 c 为任意常数.

② $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k\neq\frac{c_1}{c_2}$情形.

令 $u=a_2x+b_2y$,这时有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\frac{ku+c_1}{u+c_2}$$

是变量分离方程.

③ $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$情形.

如果方程(2.13)中 c_1,c_2不全为零,方程右端分子、分母都是 x,y 的一次多项式,因此

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\tag{2.14}$$

代表 Oxy 平面上两条相交的直线,设交点为(α,β).若令

$$\begin{cases}X=x-\alpha,\\Y=y-\beta,\end{cases}\tag{2.15}$$

则(2.14)化为

$$\begin{cases}a_1X+b_1Y=0,\\a_2X+b_2Y=0,\end{cases}$$

从而(2.13)变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\frac{Y}{X}\right).\tag{2.16}$$

因此,求解上述变量分离方程,最后代回原变量即可得原方程(2.13)的解.

如果方程(2.13)中 $c_1=c_2=0$,可不必求解(2.14),直接取变换 $u=\frac{y}{x}$即可.

上述解题的方法和步骤也适用于比方程(2.13)更一般的方程类型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

此外，诸如

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c),$$

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0,$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy),$$

$$\frac{dy}{dx}=xf\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

以及

$$M(x,y)(xdx+ydy)+N(x,y)(xdy-ydx)=0$$

(其中 M,N 为 x,y 的齐次函数，次数可以不相同)等一些方程类型，均可通过适当的变量变换化为变量分离方程. 读者不妨作为练习把相应的变换找出来.

例 7 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}. \tag{2.17}$$

解 解方程组

$$\begin{cases}x-y+1=0,\\x+y-3=0,\end{cases}$$

得 $x=1,y=2$. 令

$$\begin{cases}x=X+1,\\y=Y+2,\end{cases}$$

代入方程(2.17)，则有

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}. \tag{2.18}$$

再令 $u=\frac{Y}{X}$，即 $Y=uX$，则(2.18)化为

$$\frac{dX}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}du,$$

两边积分，得

$$\ln X^2 = -\ln|u^2+2u-1| + \tilde{c},$$

因此

$$X^2(u^2+2u-1) = \pm e^{\tilde{c}},$$

记 $\pm e^{\tilde{c}} = c_1$，并代回原变量，得

$$Y^2+2XY-X^2 = c_1,$$

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2 = c_1.$$

此外，容易验证

$$u^2+2u-1=0,$$

即

$$Y^2+2XY-X^2=0$$

也是方程(2.18)的解. 因此方程(2.17)的通解为

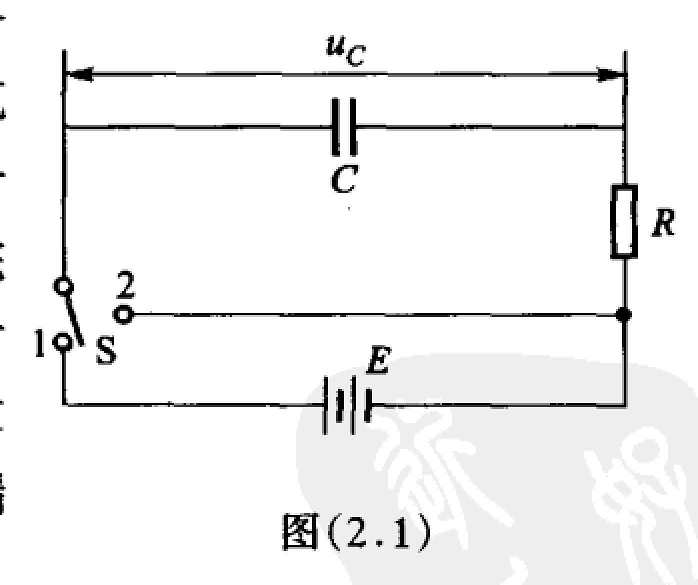
$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c,$$

其中 c 为任意常数.

2.1.3 应用举例

例 8 电容器的充电和放电.

如图(2.1)所示的 RC 电路，开始时电容 C 上没有电荷，电容两端的电压为零. 我们把开关 S 合上"1"后，电池 E 就对电容 C 充电，电容 C 两端的电压 u_C 逐渐升高. 经过相当时间后，电容充电完毕，我们再把开关 S 合上"2"，这时电容就开始了放电过程. 现在要求找出充、放电过程中，电容 C 两端的电压 u_C 随时间 t 的变化规律.



图(2.1)

解 对于充电过程，由闭合回路的基尔霍夫第二定律，有

$$u_C + RI = E, \tag{2.19}$$

对电容 C 充电时，电容上的电量 Q 逐渐增多，根据 $Q = Cu_C$ 得到

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cu_C)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}. \tag{2.20}$$

将(2.20)代入(2.19),得到 u_C 满足的微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=E, \tag{2.21}$$

这里 R,C,E 都是常数.方程(2.21)属于变量分离方程.将(2.21)分离变量,得到

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{u_C-E}=-\frac{\mathrm{d}t}{RC},$$

两边积分,得到

$$\ln|u_C-E|=-\frac{1}{RC}t+c_1,$$

即

$$u_C-E=\pm \mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}=c_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t},$$

这里 $c_2=\pm \mathrm{e}^{c_1}$ 为任意常数.

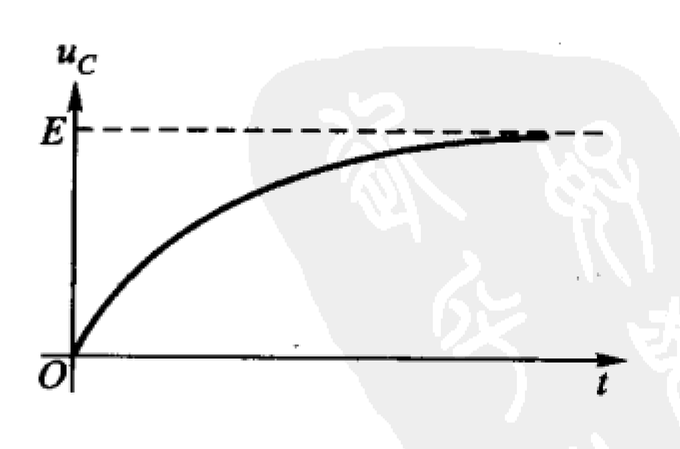
将初值条件 $t=0$ 时,$u_C=0$ 代入,得到

$$c_2=-E,$$

所以

$$u_C=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}). \tag{2.22}$$

这就是 RC 电路充电过程中电容 C 两端的电压的变化规律.由(2.22)知道,电压 u_C 从零开始逐渐增大,且当 $t\to+\infty$ 时,$u_C\to E$,见图(2.2).在电工学中,通常称 $\tau=RC$ 为时间常数,当 $t=3\tau$ 时,$u_C=0.95E$,就是说,经过 3τ 的时间后,电容 C 上的电压已达到外加电压的 95%.实用上,通常认为这时电容 C 的充电过程已基本结束.易见充电结果 $u_C=E$.



图(2.2)

对于放电过程的讨论,可以类似地进行,留给读者自己去完成.

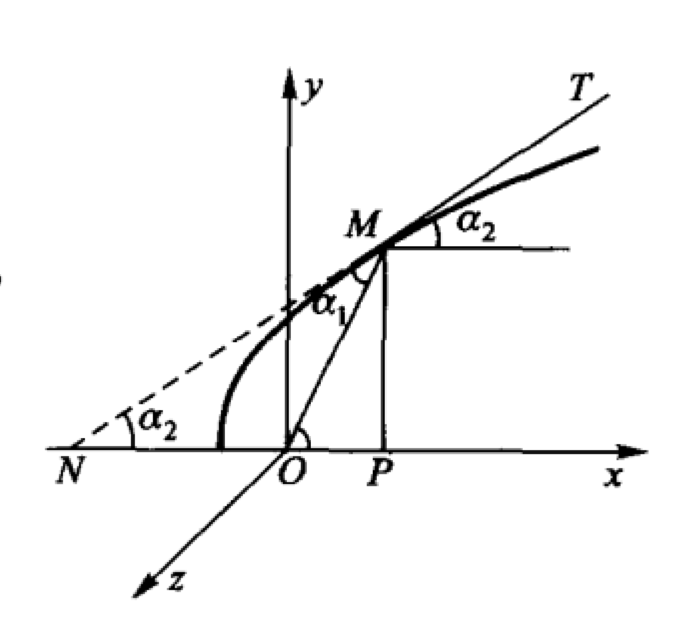
例 9 探照灯反射镜面的形状.

在制造探照灯的反射镜面时,总是要求将点光源射出的光线平行地反射出去,以保证探照灯有良好的方向性,试求反射镜面的几何形状.

解 取光源所在处为坐标原点,而 x 轴平行于光的反射方向,如图(2.3).设所求曲面由曲线

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

绕 x 轴旋转而成,则求反射镜面的问题归结为求 Oxy 平面上的曲线 $y = f(x)$ 的问题.



图(2.3)

过曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $M(x,y)$ 作切线 NT,则由光的反射定律:入射角等于反射角,容易推知

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

从而

$$\overline{OM} = \overline{ON}.$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\,\alpha_2 = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}},$$

及 $\overline{OP} = x, \overline{MP} = y, \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$,就得到函数 $y = f(x)$ 所应满足的微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{2.24}$$

这是齐次微分方程.由 2.1.2 知引入新变量 $u = \frac{y}{x}$ 可将它化为变

量分离方程,再经直接积分即可求得方程的解.这个求解过程留给读者自己去完成.

在此,我们顺便指出,齐次微分方程也可通过变换 $v=\frac{x}{y}$ 而化为变量分离方程.以方程(2.24)为例,由 $x=yv$ 得 $\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$,代入(2.24)得到

$$v+y\frac{dv}{dy}=v+\operatorname{sgn} y\cdot\sqrt{1+v^2},$$

于是

$$\frac{dy}{y}=\operatorname{sgn} y\cdot\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}. \tag{2.25}$$

积分(2.25)并代回原来变量,经化简整理,最后得

$$y^2=c(c+2x), \tag{2.26}$$

其中 c 为任意正常数.

(2.26)就是所求的平面曲线,它是抛物线,因此,反射镜面的形状为旋转抛物面

$$y^2+z^2=c(c+2x). \tag{2.27}$$

习题 2.1

1. 求下列方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx}=2xy$,并求满足初值条件 $x=0,y=1$ 的特解;

(2) $y^2dx+(x+1)dy=0$,并求满足初值条件 $x=0,y=1$ 的特解;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$;

(4) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$;

(5) $(y+x)dy+(x-y)dx=0$;

(6) $x\frac{dy}{dx}-y+\sqrt{x^2-y^2}=0$;

(7) $\tan y\,dx-\cot x\,dy=0$;

(8) $\frac{dy}{dx}+\frac{e^{y^2+3x}}{y}=0$;

(9) $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$;

(10) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$.

2. 作适当的变量变换求解下列方程：

(1) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$;

(5) $\frac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$;

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$;

(7) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$.

3. 证明方程$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$经变换 $xy=u$ 可化为变量分离方程,并由此求解下列方程：

(1) $y(1+x^2y^2)dx=xdy$;

(2) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$.

4. 已知 $f(x)\int_0^x f(t)dt=1(x\neq 0)$,试求函数 $f(x)$的一般表达式.

5. 求具有性质

$$x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$$

的函数 $x(t)$,已知 $x'(0)$存在.

6. 求一曲线,使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两段.

7. 在图(2.1)所示的 RC 电路中,设 $E=10$ V, $R=100$ Ω, $C=0.01$ F,而开始时电容 C 上没有电荷.问：

(1) 当开关 K 合上"1"后，经过多长时间电容 C 上的电压 $u_C = 5\ \mathrm{V}$?

(2) 当开关 K 合上"1"后，经过相当长的时间（如 1 分钟后）开关 K 从"1"突然转至"2"，试求 u_C 的变化规律，并问经过多长时间 $u_C = 5\ \mathrm{V}$?

8. 求出习题 1.2 第 8 题(1)所确定的曲线，其中 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

9. 证明满足习题 1.2 第 8 题(7)所给条件的曲线是抛物线族.

§2.2 线性微分方程与常数变易法

一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x), \tag{2.28}$$

其中 $P(x)$, $Q(x)$ 在考虑的区间上是 x 的连续函数. 若 $Q(x) = 0$，(2.28)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y, \tag{2.3}$$

(2.3)称为**一阶齐次线性微分方程**. 若 $Q(x) \neq 0$，(2.28)称为**一阶非齐次线性微分方程**.

(2.3)是变量分离方程，我们已经在§2.1 例 4 中求得它的通解为

$$y = c\,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{2.4}$$

这里 c 是任意常数.

现在讨论非齐次线性微分方程(2.28)通解的求法.

不难看出，(2.3)是(2.28)的特殊情形，可以设想：在(2.4)中，将常数 c 变易为 x 的待定函数 $c(x)$. 令

$$y = c(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{2.29}$$

微分之，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+c(x)P(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.30}$$

以(2.29),(2.30)代入(2.28),得到

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+c(x)P(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$
$$=P(x)c(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+Q(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}=Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

积分后得到

$$c(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{c},$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数.将上式代入(2.29),得到方程(2.28)的通解

$$y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{c}\right). \tag{2.31}$$

这种将常数变易为待定函数的方法,我们通常称为**常数变易法**.常数变易法实际上也是一种变量变换的方法,通过变换(2.29)可将方程(2.28)化为变量分离方程.

若方程不能化为(2.28)形式,可以将 x 看作是 y 的函数,再看是否为(2.28)形式.

例 1 求方程 $(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-ny=\mathrm{e}^x(x+1)^{n+1}$ 的通解,这里 n 为常数.

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{n}{x+1}y=\mathrm{e}^x(x+1)^n. \tag{2.32}$$

首先,求齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{n}{x+1}y=0$$

的通解,从

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{n}{x+1}\mathrm{d}x$$

得到齐次线性微分方程的通解

$$y=c(x+1)^n.$$

其次应用常数变易法求非齐次线性微分方程的通解.为此,在上式中把 c 看成为 x 的待定函数 $c(x)$,即

$$y=c(x)(x+1)^n, \tag{2.33}$$

微分之,得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}(x+1)^n+n(x+1)^{n-1}c(x). \tag{2.34}$$

以(2.33)及(2.34)代入(2.32),得到

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x,$$

积分之,求得

$$c(x)=\mathrm{e}^x+\tilde{c}.$$

因此,以所求的 $c(x)$代入(2.33),即得原方程的通解

$$y=(x+1)^n(\mathrm{e}^x+\tilde{c}),$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数.

例 2 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x-y^2}$的通解.

解 原方程不是未知函数 y 的线性微分方程,但我们可将它改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x-y^2}{y},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{y}x-y, \tag{2.35}$$

把 x 看作未知函数,y 看作自变量,这样,对于 x 及$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$来说,方程(2.35)就是一个线性微分方程.

首先,求出齐次线性微分方程

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x$$

的通解为

$$x=cy^2. \tag{2.36}$$

其次,利用常数变易法求非齐次线性微分方程(2.35)的通解. 把 c 看成 $c(y)$,微分(2.36),得到

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dc(y)}{dy}y^2+2c(y)y.$$

代入(2.35),得到

$$\frac{dc(y)}{dy}=-\frac{1}{y},$$

积分之,即可求得

$$c(y)=-\ln|y|+\tilde{c}.$$

从而,原方程的通解为

$$x=y^2(\tilde{c}-\ln|y|),$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数.

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \tag{2.37}$$

的方程,称为**伯努利微分方程**,这里 $P(x)$,$Q(x)$ 为 x 的连续函数,$n\neq 0,1$ 是常数.

利用变量变换可将伯努利微分方程化为线性微分方程. 事实上,对于 $y\neq 0$,用 y^{-n} 乘(2.37)两边,得到

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{1-n}P(x)+Q(x), \tag{2.38}$$

引入变量变换

$$z=y^{1-n}, \tag{2.39}$$

从而

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{2.40}$$

将(2.39),(2.40)代入(2.38),得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x), \tag{2.41}$$

这是线性微分方程,可按上面介绍的方法求得它的通解,然后代回原来的变量,便得到(2.37)的通解.此外,当 $n>0$ 时,方程还有解 $y=0$.

例 3 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6\frac{y}{x}-xy^2$的通解.

解 这是 $n=2$ 时的伯努利微分方程.令

$$z=y^{-1},$$

算得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

代入原方程得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{6}{x}z+x,$$

这是线性微分方程,求得它的通解为

$$z=\frac{c}{x^6}+\frac{x^2}{8}.$$

代回原来的变量 y,得到

$$\frac{1}{y}=\frac{c}{x^6}+\frac{x^2}{8},$$

或者

$$\frac{x^6}{y}-\frac{x^8}{8}=c,$$

这就是原方程的通解.

此外,方程还有解 $y=0$.



习题 2.2

1. 求下列方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx}=y+\sin x$;

(2) $\frac{dx}{dt}+3x=e^{2t}$;

(3) $\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$;

(4) $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^{x}x^{n}$($n$ 为常数);

(5) $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y-1=0$;

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$;

(7) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$;

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$;

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{x}+\frac{x+1}{x}$($a$ 为常数);

(10) $x\frac{dy}{dx}+y=x^3$;

(11) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$;

(12) $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$;

(13) $2xy\,dy=(2y^2-x)dx$;

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$;

(15) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$;

(16) $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$.

2. 设函数 $\varphi(t)$于 $-\infty<t<+\infty$上连续,$\varphi'(0)$存在且满足关系式

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s),$$

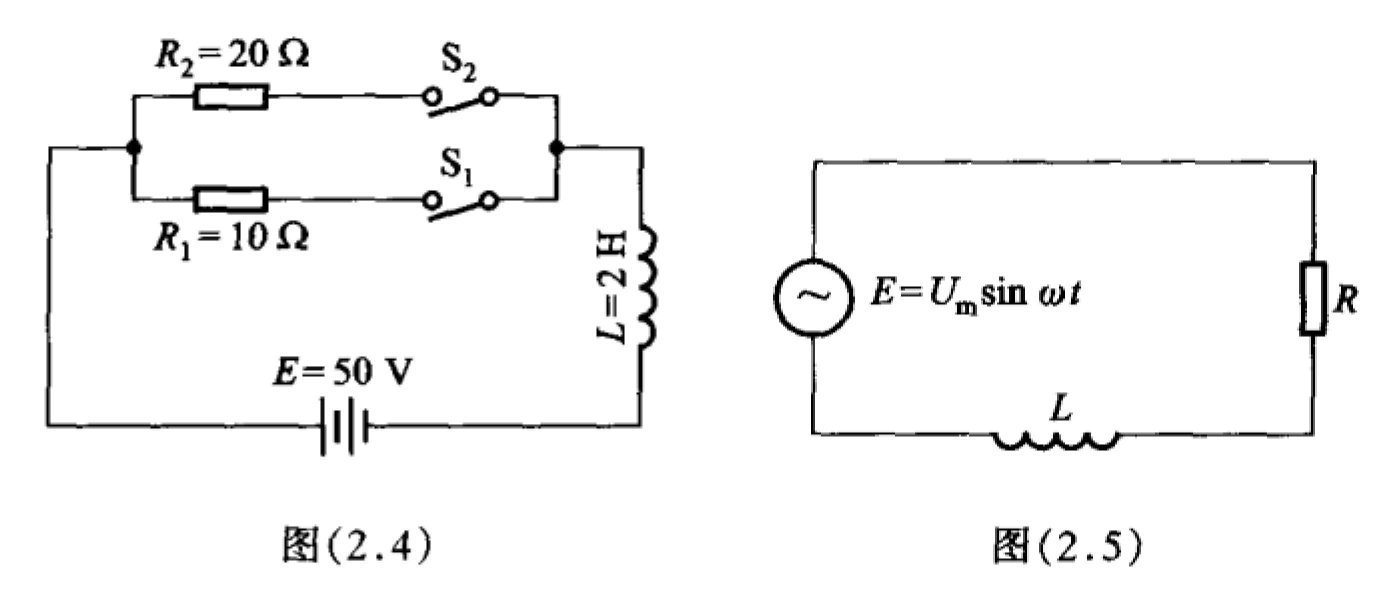
试求此函数.

3. 如图(2.4)所示的 RL 电路,试求:

(1) 当开关 S_1 合上 10 s 后,电感 L 上的电流;

(2) S_1 合上 10 s 后再将 S_2 合上,求 S_2 合上 20 s 后,电感 L 上的电流.

4. 试求图(2.5)所示的 RL 电路电感上电流 $I(t)$ 的变化规律,并解释其物理意义,设 $t=0$ 时,$I=0$.



图(2.4)　　　　图(2.5)

5. 试证:

(1) 一阶非齐次线性微分方程(2.28)的任两解之差必为相应的齐次线性微分方程(2.3)之解;

(2) 若 $y=y(x)$ 是(2.3)的非零解,而 $y=\tilde{y}(x)$ 是(2.28)的解,则方程(2.28)的通解可表为 $y=cy(x)+\tilde{y}(x)$,其中 c 为任意常数;

(3) 方程(2.3)任一解的常数倍或任两解之和(或差)仍是方程(2.3)的解.

6. 求解习题 1.2 第 8 题(5)和(6).

7. 求解下列方程:

(1) $(x^2-1)y'-xy+1=0$;

(2) $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+x^3=0$;

(3) $y'\sin x\cdot\cos x-y-\sin^3 x=0$.

§2.3　恰当微分方程与积分因子

2.3.1　恰当微分方程

我们可以将一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

写成微分的形式

$$f(x,y)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0,$$

或把 x,y 平等看待,写成下面具有对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0, \tag{2.42}$$

这里假设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数,且具有连续的一阶偏导数.这样的形式有时便于探求方程的通解.

如果方程(2.42)的左端恰好是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,即

$$\begin{aligned}M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y&=\mathrm{d}u(x,y)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{2.43}$$

则称(2.42)为**恰当微分方程**.

容易验证,(2.42)的通解就是

$$u(x,y)=c, \tag{2.44}$$

这里 c 是任意常数.

这样,我们自然会提出如下问题:

(1) 如何判别(2.42)是恰当微分方程?

(2) 如果(2.42)是恰当微分方程,如何求得函数 $u=u(x,y)$?

为了回答以上问题,我们首先察看,如果(2.42)是恰当微分方程时,函数 $M(x,y),N(x,y)$ 应该具有什么性质?从(2.43)得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \tag{2.45}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N, \tag{2.46}$$

将(2.45)、(2.46)分别对 y,x 求偏导数,得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

由于$\frac{\partial M}{\partial y}$,$\frac{\partial N}{\partial x}$的连续性,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

故

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.47}$$

因此,(2.47)是(2.42)为恰当微分方程的必要条件.现在证明(2.47)也是(2.42)为恰当微分方程的充分条件,或更进一步证明:如果方程(2.42)满足条件(2.47),我们能找到函数 u,使它同时适合方程(2.45)和(2.46).这样,就回答了以上提出的两个问题.

我们从关系式(2.45)出发,把 y 看作参数,解这个方程,得到

$$u = \int M(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y), \tag{2.48}$$

这里 $\varphi(y)$是 y 的任意可微函数.我们现在来选择 $\varphi(y)$使 u 同时满足(2.46),即

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = N,$$

由此

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x. \tag{2.49}$$

我们证明,(2.49)的右端与 x 无关.为此,只需证明(2.49)的右端对 x 的偏导数恒等于零.事实上

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right] &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0,\end{aligned}$$

在我们的假设条件下,上述交换求导的顺序是允许的.于是,

(2.49)右端的确只含有 y,积分之,得到

$$\varphi(y)=\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y, \tag{2.50}$$

将(2.50)代入(2.48),即求得

$$u=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

因此,恰当微分方程(2.42)的通解就是

$$\int M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=c, \tag{2.51}$$

这里 c 是任意常数.

例 1 求$(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 这里 $M=3x^2+6xy^2, N=6x^2y+4y^3$,这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy,$$

因此方程是恰当微分方程.

现在求 u,使它同时满足如下两个方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2, \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3. \tag{2.53}$$

由(2.52)对 x 积分,得到

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y), \tag{2.54}$$

为了确定 $\varphi(y)$,将(2.54)对 y 求导数,并使它满足(2.53),即得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=6x^2y+4y^3,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=4y^3,$$

积分后可得

$$\varphi(y)=y^4,$$

将 $\varphi(y)$代入(2.54),得到

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

因此,方程的通解为

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c,$$

这里 c 是任意常数.

往往在判断方程是恰当微分方程后,并不需要按照上述一般方法来求解,而是采取"分项组合"的办法,先把那些本身已构成全微分的项分出,再把剩下的项凑成全微分.这种方法要求熟记一些简单二元函数的全微分,如

$$\left.\begin{aligned}
&y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy), \\
&\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right), \\
&\frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right), \\
&\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right), \\
&\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right), \\
&\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

现在试用这种方法求解下面例题.

例 2 用"分项组合"的办法,求解例 1.

解 把方程重新"分项组合",得到

$$3x^2\mathrm{d}x + 4y^3\mathrm{d}y + 6xy^2\mathrm{d}x + 6x^2y\mathrm{d}y = 0,$$

即

$$\mathrm{d}x^3 + \mathrm{d}y^4 + 3y^2\mathrm{d}x^2 + 3x^2\mathrm{d}y^2 = 0,$$

或者写成

$$\mathrm{d}(x^3 + y^4 + 3x^2y^2) = 0.$$

于是,方程的通解为

$$x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = c,$$

这里 c 是任意常数.

例 3 求解方程$\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$.

解 因为$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$,故方程是恰当微分方程.把方程重新"分项组合",得到

$$\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)=0,$$

即

$$\mathrm{d}\sin x+\mathrm{d}\ln|y|+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=0,$$

或者写成

$$\mathrm{d}\left(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0.$$

于是,方程的通解为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=c,$$

这里 c 是任意常数.

2.3.2 积分因子

恰当微分方程可以通过积分求出它的通解.因此能否将一个非恰当微分方程化为恰当微分方程就有很大的意义.积分因子就是为了解决这个问题而引进的概念.

如果存在连续可微的函数 $\mu=\mu(x,y)\neq 0$,使得

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

为一恰当微分方程,即存在函数 v,使

$$\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y\equiv\mathrm{d}v, \tag{2.56}$$

则称 $\mu(x,y)$为方程(2.42)的**积分因子**.

这时 $v(x,y)=c$ 是(2.56)的通解,因而也就是(2.42)的通解.

由(2.55)看到,同一方程 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 可以有不同的积分

因子$\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2\pm y^2}$.可以证明,只要方程有解存在,则必有积分因子存在,并且不是唯一的.因此,在具体解题过程中,由于求出的积分因子不同从而通解可能具有不同的形式.

根据2.3.1,函数$\mu(x,y)$为(2.42)的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,\tag{2.57}$$

这是一个以μ为未知函数的一阶线性偏微分方程.要想通过解方程(2.57)来求积分因子,从而得到方程(2.42)的解,在一般情况下,将比求解方程(2.42)本身更困难.但是,在若干特殊情形中,求(2.57)的一个特解还是容易的,所以(2.57)也就提供了寻求特殊形式的积分因子的一个途径.

例如,对于方程(2.42),如果存在只与x有关的积分因子$\mu=\mu(x)$,则$\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$,这时方程(2.57)变成

$$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

即

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx.\tag{2.58}$$

由此可知,方程(2.42)有只与x有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x),\tag{2.59}$$

这里$\psi(x)$仅为x的函数.假如条件(2.59)成立,则根据方程(2.58),可以求得方程(2.42)的一个积分因子

$$\mu=e^{\int\psi(x)dx}.\tag{2.60}$$

同样,(2.42)有只与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y),$$

这里 $\varphi(y)$ 仅为 y 的函数.从而求得方程(2.42)的一个积分因子

$$\mu=e^{\int\varphi(y)dy}.$$

例 4 试用积分因子法解线性微分方程(2.28).

解 将(2.28)改写成

$$[P(x)y+Q(x)]dx-dy=0, \tag{2.61}$$

这时,$M=P(x)y+Q(x)$,$N=-1$,算得

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x),$$

因而,线性方程有只与 x 有关的积分因子 $\mu=e^{-\int P(x)dx}$. 以 $\mu=e^{-\int P(x)dx}$ 乘(2.61)得到

$$P(x)e^{-\int P(x)dx}ydx-e^{-\int P(x)dx}dy+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0,$$

即

$$yde^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}dy-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0,$$

或者写成

$$d(ye^{-\int P(x)dx})-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0.$$

因此,(2.61)的通解为

$$ye^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=c,$$

或者改写为

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c\right),$$

这与前面得到的结果(2.31)完全一样.这里我们又得到一个解线性微分方程(2.28)的方法.

积分因子一般是不容易求得的,我们可以先从求特殊形状的

积分因子(如只与 x 或只与 y 有关的积分因子)开始,或者通过观察法进行“分项组合”而求得积分因子.下面通过例子说明一些简单的积分因子的求法.运用积分因子解题,需要有一定的技巧,这就要多作练习,从中体会.

例 5 求解方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\quad(y>0)$.

解 方程可以改写为

$$xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2}dx,$$

或

$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

容易看出,此方程有积分因子 $\mu=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,以 μ 乘之得

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx,$$

故通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+c,$$

或

$$y^2=c(c+2x).$$

例 6 求解方程 $ydx+(y-x)dy=0$.

解 这里 $M=y,N=y-x,\frac{\partial M}{\partial y}=1,\frac{\partial N}{\partial x}=-1$,方程不是恰当的.

方法 1 因为 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$ 只与 y 有关,故方程有只与 y 有关的积分因子

$$\mu=e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}.$$

以 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 乘方程两边，得到

$$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{y}dy-\frac{x\,dy}{y^2}=0,$$

或者写成

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+\frac{dy}{y}=0.$$

因而，通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$$

方法2　将方程改写为

$$y\,dx-x\,dy=-y\,dy,$$

由(2.55)知道，左端有积分因子 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 或 $\mu=\frac{1}{x^2}$，…，但考虑到右端只与 y 有关，故取 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 为方程的积分因子，由此得到

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=-\frac{1}{y}dy.$$

因此，通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$$

顺便指出，这里采用别的求解方法也是十分方便的. 例如：

方法3　方程可以写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y},$$

这是齐次微分方程，令 $\frac{y}{x}=u$，代入得到

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-u},$$

即

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

因此,通解为

$$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-c,$$

代回原来的变量,即得

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$$

方法4　把 x 看作未知函数,y 看作自变量,方程变为线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}-1,$$

同样解得

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=c.$$

此外,易见 $y=0$ 也是原方程的解.

习题 2.3

1. 验证下列方程是恰当微分方程,并求出方程的解:

(1) $(x^2+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(y-3x^2)\mathrm{d}x-(4y-x)\mathrm{d}y=0$;

(3) $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]\mathrm{d}y=0$;

(4) $2(3xy^2+2x^3)\mathrm{d}x+3(2x^2y+y^2)\mathrm{d}y=0$;

(5) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$.

2. 求下列方程的解:

(1) $2x(ye^{x^2}-1)\mathrm{d}x+e^{x^2}\mathrm{d}y=0$;

(2) $(e^x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$;

(3) $2xy\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}y=0$;

(4) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=(x^2+y^2)\mathrm{d}x$;

(5) $y\mathrm{d}x-(x+y^3)\mathrm{d}y=0$;

(6) $(y-1-xy)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$;

(7) $(y-x^2)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$;

(8) $(x+2y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$;

(9) $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]\mathrm{d}x + x\cos(x+y)\mathrm{d}y = 0$;

(10) $(y\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x + (y\sin x + x\cos x)\mathrm{d}y = 0$;

(11) $x(4y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y) + y^3(3y\mathrm{d}x + 5x\mathrm{d}y) = 0$.

3. 试导出方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 分别具有形为 $\mu(x+y)$ 和 $\mu(xy)$ 的积分因子的充要条件.

4. 设 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续,试证方程 $\mathrm{d}y - f(x,y)\mathrm{d}x = 0$ 为线性微分方程的充要条件是它有仅依赖于 x 的积分因子.

5. 试证齐次微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 当 $xM + yN \neq 0$ 时有积分因子 $\mu = \frac{1}{xM + yN}$.

6. 设函数 $f(u)$,$g(u)$ 连续、可微且 $f(u) \neq g(u)$,试证方程

$$yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$$

有积分因子 $\mu = (xy[f(xy) - g(xy)])^{-1}$.

7. 假设方程(2.42)中的函数 $M(x,y)$,$N(x,y)$ 满足关系

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = Nf(x) - Mg(y),$$

其中 $f(x)$,$g(y)$ 分别为 x 和 y 的连续函数,试证方程(2.42)有积分因子 $\mu = \exp\left(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y\right)$.

8. 求出伯努利微分方程的积分因子.

9. 设 $\mu(x,y)$ 是方程(2.42)的积分因子,从而求得可微函数 $U(x,y)$,使得 $\mathrm{d}U = \mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)$. 试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是方程(2.42)的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y) = \mu\varphi(U)$,其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数.

10. 设 $\mu_1(x,y)$,$\mu_2(x,y)$ 是方程(2.42)的两个积分因子,且 $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq$ 常数,求证 $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$(任意常数)是方程(2.42)的通解.

11. 假设第 5 题中微分方程还是恰当的,试证它的通解可表为 $xM(x,y) + yN(x,y) = c$(c 为任意常数).

§2.4　一阶隐式微分方程与参数表示

一阶隐式微分方程的一般形式可表示为

$$F(x,y,y')=0,$$

如果能从此方程中解出导数 y',其表达式为 $y'=f(x,y)$,则可依 $f(x,y)$的具体形状如何而选择§2.1～§2.3所介绍的某一方法进行求解.但如果难以从方程中解出 y',或即使解出 y',而其表达式相当复杂的情况下,则宜采用引进参数的办法使之变为导数已解出的方程类型,这正是本节讨论的主要思想.这里主要介绍以下四种类型:

(1) $y=f(x,y')$;　　　(2) $x=f(y,y')$;

(3) $F(x,y')=0$;　　　(4) $F(y,y')=0$.

2.4.1　可以解出 y(或 x)的方程

1. 首先讨论形如

$$y=f\left(x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{2.62}$$

的方程的解法,这里假设函数 $f\left(x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$有连续的偏导数.

引进参数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$,则(2.62)变为

$$y=f(x,p) \tag{2.63}$$

将(2.63)两边对 x 求导数,并以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$ 代入,得到

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}. \tag{2.64}$$

方程(2.64)是关于 x,p 的一阶微分方程,但它的导数已解出.于是我们可按§2.1～§2.3的方法求出它的解.

若已求得(2.64)的通解的形式为

$$p=\varphi(x,c),$$

将它代入(2.63),得到

$$y=f(x,\varphi(x,c)),$$

这就是(2.62)的通解.

若求得(2.64)的通解的形式为

$$x=\psi(p,c),$$

则得到(2.62)的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\psi(p,c),\\ y=f(\psi(p,c),p),\end{cases}$$

其中 p 是参数,c 是任意常数.

若求得(2.64)的通解的形式为

$$\Phi(x,p,c)=0,$$

则得到(2.62)的参数形式的通解

$$\begin{cases}\Phi(x,p,c)=0,\\ y=f(x,p),\end{cases}$$

其中 p 是参数,c 为任意常数.

例 1 求方程 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+2x\dfrac{dy}{dx}-y=0$ 的解.

解 解出 y,并令 $\dfrac{dy}{dx}=p$,得到

$$y=p^3+2xp, \tag{2.65}$$

两边对 x 求导数,得到

$$p=3p^2\frac{dp}{dx}+2x\frac{dp}{dx}+2p,$$

即

$$3p^2dp+2xdp+pdx=0.$$

当 $p\neq0$ 时,上式乘以 p 得到

$$3p^3dp+2xpdp+p^2dx=0,$$

积分之,注意到中间一项为 xdp^2,得到

$$\frac{3p^4}{4}+xp^2=c.$$

解出 x,得到

$$x=\frac{c-\frac{3}{4}p^4}{p^2},$$

将它代入(2.65),即得

$$y=p^3+\frac{2\left(c-\frac{3}{4}p^4\right)}{p}.$$

因此,得到方程的参数形式的通解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{3}{4}p^2, \\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{1}{2}p^3, \end{cases} \quad p\neq 0.$$

当 $p=0$ 时,由(2.65)直接推知 $y=0$ 也是方程的解.

例 2 求方程 $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$ 的解.

解 令 $\frac{dy}{dx}=p$,得到

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}, \tag{2.66}$$

两边对 x 求导数,得到

$$p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x,$$

或

$$\left(\frac{dp}{dx}-1\right)(2p-x)=0.$$

从 $\frac{dp}{dx}-1=0$ 解得

$$p=x+c,$$

并将它代入(2.66)得到方程的通解

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2. \tag{2.67}$$

又从 $2p-x=0$ 解得

$$p=\frac{x}{2},$$

以此代入(2.66)又得方程的一个解

$$y=\frac{x^2}{4}. \tag{2.68}$$

注意此解与通解(2.67)中的每一条积分曲线均相切(见图(2.6)),

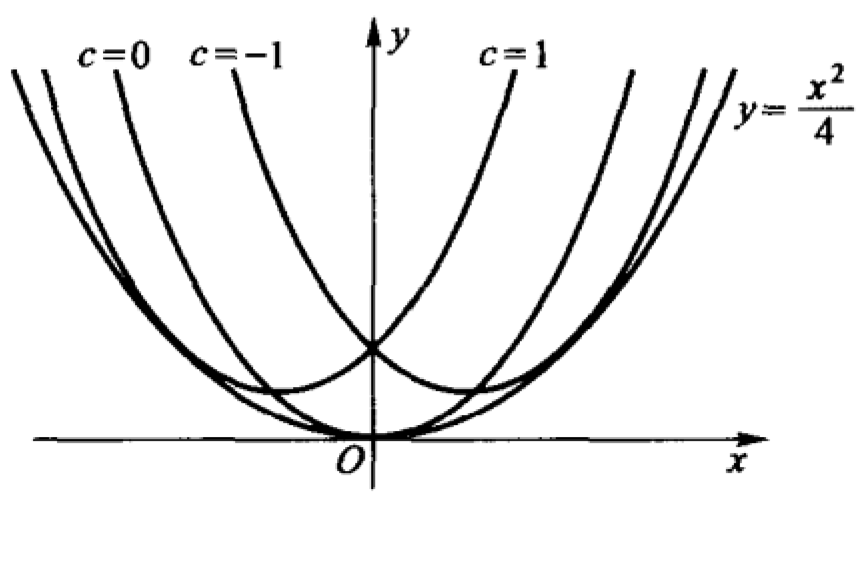


图 (2.6)

这样的解我们称之为**奇解**.在下一章将给出奇解的确切含义.

2. 形如

$$x=f\left(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{2.69}$$

的方程的求解方法与方程(2.62)的求解方法完全类似.这里假定函数 $f\left(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$有连续偏导数.

引进参数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$,则(2.69)变为

$$x=f(y,p), \tag{2.70}$$

将(2.70)两边对 y 求导数,然后以$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{p}$代入,得到

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \tag{2.71}$$

方程(2.71)是关于 y,p 的一阶微分方程，但它的导数$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$已解出，于是可按§2.1～§2.3 的办法去求解.设求得通解为

$$\Phi(y,p,c)=0,$$

则得(2.69)的通解为

$$\begin{cases} x=f(y,p), \\ \Phi(y,p,c)=0. \end{cases}$$

例 3 求解例 1 中的方程$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$.

解 解出 x，并以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$ 代入，得到

$$x=\frac{y-p^3}{2p}, p\neq0, \tag{2.72}$$

对 y 求导数，得到

$$\frac{1}{p}=\frac{p\left(1-3p^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)-(y-p^3)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}}{2p^2},$$

或

$$p\mathrm{d}y+y\mathrm{d}p+2p^3\mathrm{d}p=0.$$

积分之，即有

$$2yp+p^4=c,$$

因而

$$y=\frac{c-p^4}{2p},$$

代入(2.72)，求得

$$x=\frac{\frac{c-p^4}{2p}-p^3}{2p}=\frac{c-3p^4}{4p^2}.$$

所以，方程的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{4p^2} - \dfrac{3}{4}p^2, \\ y = \dfrac{c}{2p} - \dfrac{p^3}{2}, \end{cases} \qquad p \neq 0.$$

此外,还有解 $y=0$. 这和例 1 所得结果完全一样(这里的任意常数 c 换成 $4c$).

2.4.2 不显含 y(或 x)的方程

3. 现在讨论形如

$$F(x, y') = 0 \tag{2.73}$$

的方程的解法.

记 $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$. 从几何的观点看, $F(x, p) = 0$ 代表 Oxp 平面上的一条曲线. 设把这曲线表为适当的参数形式

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ p = \psi(t), \end{cases} \tag{2.74}$$

这里 t 为参数. 再注意到,沿方程(2.73)的任何一条积分曲线上,恒满足基本关系 $dy = p\,dx$. 以(2.74)代入上式得

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

两边积分,得到

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c,$$

于是得到方程(2.73)的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t)dt + c, \end{cases}$$

c 为任意常数.

例 4 求解方程 $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0\left(这里\ y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

解 令 $y' = p = tx$,则由方程得

$$x=\frac{3t}{1+t^3},$$

从而

$$p=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

于是

$$\mathrm{d}y=\frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t,$$

积分之,得到

$$y=\int\frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\ \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c.$$

因此,方程的通解表成参数形式

$$\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^3},\\ y=\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c.\end{cases}$$

4. 形如

$$F(y,y')=0 \tag{2.75}$$

的方程,其求解方法同方程(2.73)的求解方法类似.

记 $p=y'$,引入参数 t,将方程表为适当的参数形式

$$\begin{cases}y=\varphi(t),\\ p=\psi(t),\end{cases}$$

由关系式 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$ 得 $\varphi'(t)\mathrm{d}t=\psi(t)\mathrm{d}x$,由此得

$$\mathrm{d}x=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t,$$

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+c.$$

于是

$$\begin{cases}x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+c,\\ y=\varphi(t)\end{cases}$$

为方程的参数形式的通解，其中 c 为任意常数.

此外，不难验证，若 $F(y,0)=0$ 有实根 $y=k$，则 $y=k$ 也是方程的解.

例 5 求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$.

解 令 $2-y'=yt$，则与原微分方程消去 y'后，有

$$y^2(yt-1)=y^2t^2,$$

由此得

$$y=\frac{1}{t}+t,$$

并且

$$y'=1-t^2,$$

这是原微分方程的参数形式. 因此

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$$

积分之，得到

$$x=\frac{1}{t}+c.$$

于是求得方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}+c, \\ y=\dfrac{1}{t}+t, \end{cases}$$

或者消去参数 t 得

$$y=x+\frac{1}{x-c}-c,$$

其中 c 为任意常数.

此外，当 $y'=0$ 时原方程变为 $y^2=4$，于是 $y=\pm 2$ 也是方程的解.

习题 2.4

1. 求解下列方程：

(1) $xy'^3=1+y'$;

(2) $y'^3-x^3(1-y')=0$;

(3) $y=y'^2e^{y'}$;

(4) $y(1+y'^2)=2a$(a 为常数);

(5) $x^2+y'^2=1$;

(6) $y^2(y'-1)=(2-y')^2$.

本章学习要点

在这一章里,我们讨论了一阶方程

$$F(x,y,y')=0$$

的若干类型的初等解法,归纳起来就是:

1. 若方程能就 y' 解出,即方程取形式

$$y'=f(x,y) \quad 或 \quad M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

时方程的求解问题.在§2.1～§2.3 里,我们主要介绍了五种类型的方程(变量分离方程、齐次微分方程、线性微分方程、伯努利微分方程及恰当微分方程)的初等解法.实际上作为基础的不外是变量分离方程和恰当微分方程,其他类型的方程均可借助变量变换或积分因子化为这两种类型,这可简略地表示如图(2.7).

2. 若方程不能解出 y',则把 x 看作是 y 的函数,再看是否能解出 x',成为方程 $x'=f(x,y)$ 可类似 1 求解.

3. 对于不能显性表示为

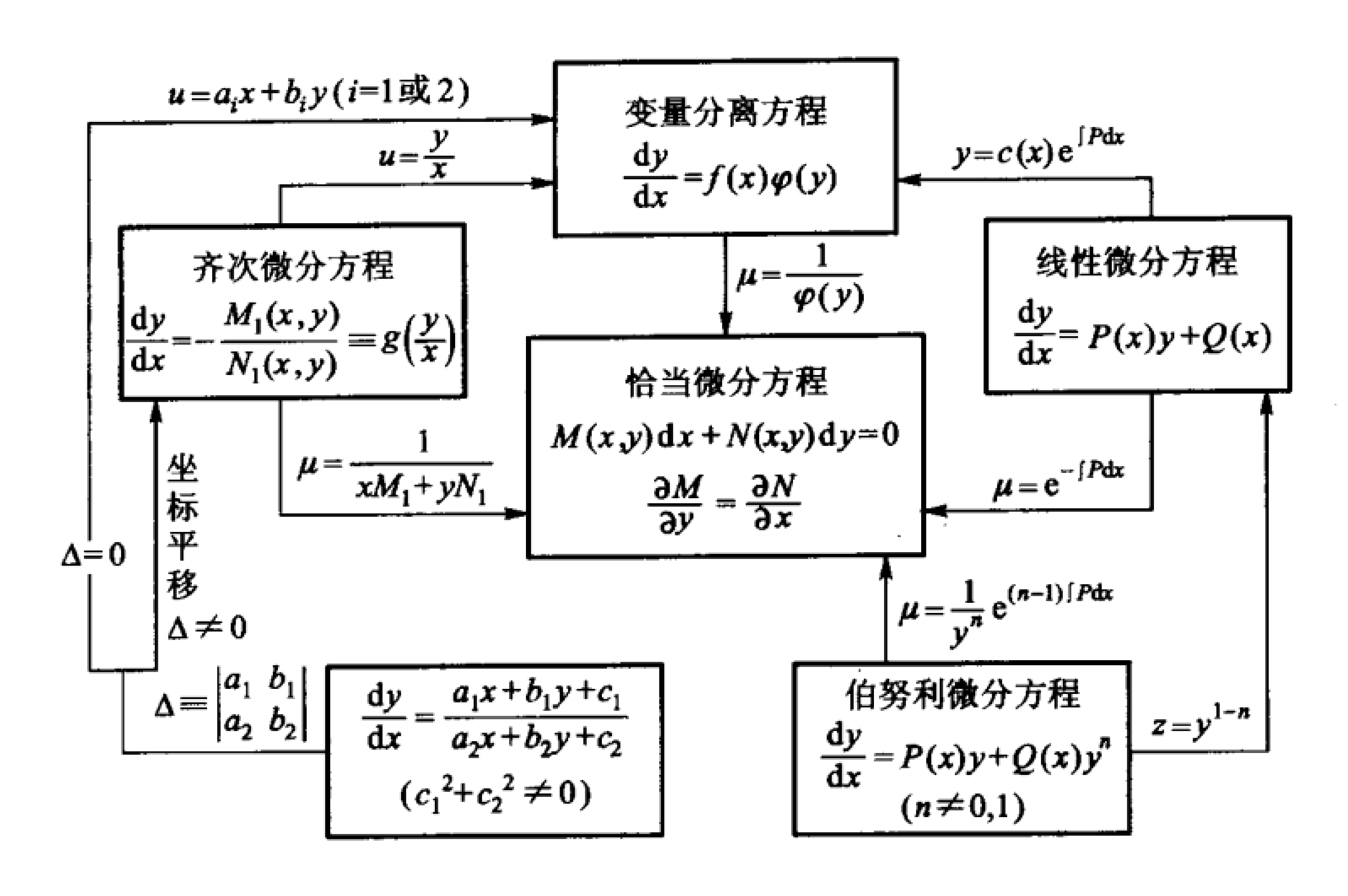
$$y'=f(x,y) \quad 或 \quad x'=f(x,y)$$
$$或 \quad M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

的方程,可分为两类:

(1) 若方程能就 y(或 x)解出

$$y=f(x,y')(或\ x=f(y,y')),$$

则令 $y'=p$(或 $x'=p$),把问题化为求解关于 p 与 x(或 y)之间的一阶方程



图(2.7)

$$p=f'_x(x,p)+f'_p(x,p)\frac{dp}{dx} \tag{2.64}$$

$$\left(或\frac{1}{p}=f'_y(y,p)+f'_p(y,p)\frac{dp}{dy}\right), \tag{2.71}$$

若按§2.1～§2.3的办法求得方程(2.64)(或(2.71))的通解为

$$\Phi(x,p,c)=0\quad(或\ \Phi(y,p,c)=0),$$

则它与 $y=f(x,p)$(或 $x=f(y,p)$)一起构成原方程的通解的参数形式(见2.4.1).

(2) 若方程不能就 y',x 或 y 解出,对于形如

$$F(x,y')=0\quad 或\quad F(y,y')=0$$

的方程,可按2.4.2介绍的方法处理:引入参数 t,将方程表示为参数形式,再注意到关系式 $dy=y'dx$,就将问题转化为求解关于 y(或 x)与 t 的一阶方程,且其导数 $\frac{dy}{dt}\left(或\frac{dx}{dt}\right)$ 已表示为 t 的已知函数,最后的工作就是求积分的问题.

熟悉各种类型方程的解法，正确而又敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型，从而按照所介绍的方法进行求解，这自然是最基本的要求．但仅仅能做到这一点还不够，因为我们所遇到的方程未必都恰好是本章所介绍过的方程类型，因此还要求注意学习解题的技巧，从中总结经验，培养自己的机智和灵活性；还有一点也很重要，就是要善于根据方程的特点，引进适当的变换，将方程化为能求解的新类型，从而求解．

最后，我们要强调指出：能有初等解法的微分方程是很有限的，例如形式上很简单的里卡蒂(Riccati)方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

一般就没有初等解法（当然，若我们有办法找到方程的一个特解 $\tilde{y}(x)$，则经变换 $y=z+\tilde{y}$ 后，方程就变为伯努利方程，因而可解）．这一事实为法国数学家刘维尔(Liouville)在 1841 年所证明，这就促使人们寻求别的方法来研究微分方程的问题．

一阶微分方程的求解有众多方法，技巧性很强，想进一步详细了解可参考《常微分方程手册》[10]．

习题 2.5

1．求下列方程的解：

(1) $y\sin x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos x=1$；

(2) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=x^2y\mathrm{d}y$；

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4\mathrm{e}^{-y}\sin x-1$；

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$；

(5) $(xy\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+y^2)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y=0$；

(6) $(xy+1)y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$；

(7) $(2x+2y-1)\mathrm{d}x+(x+y-2)\mathrm{d}y=0$；

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$;

(9) $\frac{dy}{dx}=3y+x-2$;

(10) $x\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;

(11) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$;

(12) $e^{-y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=xe^x$;

(13) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$;

(14) $\frac{dy}{dx}=x+y+1$;

(15) $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$;

(16) $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$;

(17) $(x-y^2)dx+y(1+x)dy=0$;

(18) $4x^2y^2dx+2(x^3y-1)dy=0$;

(19) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\left(\frac{dy}{dx}\right)+4x=0$;

(20) $y^2\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=1$;

(21) $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$;

(22) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$;

(23) $ydx-(1+x+y^2)dy=0$;

(24) $[y-x(x^2+y^2)]dx-xdy=0$;

(25) $\frac{dy}{dx}+e^{\frac{dy}{dx}}-x=0$;

(26) $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0$;

(27) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$;

(28) $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2y(y^2-x^2)$ （提示：令 $x^2y=u$）；

(29) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{xy}$;

(30) $\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y^2}$;

(31) $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$

(提示:令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$);

(32) $\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$ (提示:令 $u=x+y, v=xy$).

2. 求一曲线,使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标.

3. 摩托艇以 5 m/s 的速度在静水上运动,全速时停止了发动机,过了 20 s后,艇的速度减至 $v_1=3$ m/s. 确定发动机停止 2 min 后艇的速度. 假定水的阻力与艇的运动速度成正比例.

4. 一质量为 m 的质点作直线运动,从速度等于零的时刻起,有一个和时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用在它上面. 此外质点又受到介质的阻力,这阻力和速度成正比(比例系数为 k_2). 试求此质点的速度与时间的关系.

5. 证明:如果已知里卡蒂微分方程的一个特解,则可用初等解法求得它的通解. 并求解下列方程:

(1) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$;

(2) $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2 x$;

(3) $x^2y'=x^2y^2+xy+1$;

(4) $4x^2(y'-y^2)=1$;

(5) $x^2(y'+y^2)=2$;

(6) $x^2y'+(xy-2)^2=0$;

(7) $y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$.

第三章

一阶微分方程的解的存在定理

在第二章里,我们介绍了能用初等解法的一阶微分方程的若干类型,但同时指出,大量的一阶微分方程一般是不能用初等解法求出它的通解的,而实际问题中所需要的往往是要求满足某种初值条件的解(包括数值形式的数值解).因此,对初值问题(又称为柯西问题)的研究被提到了重要的地位.自然要问:初值问题的解是否存在?如果存在是否唯一呢?

容易举出解存在而不唯一的例子.例如方程

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$$

过点(0,0)的解就是不唯一的.事实上,易知 $y=0$ 是方程的过点(0,0)的解.此外,容易验证,$y=x^2$ 或更一般地,函数

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ (x-c)^2, & c<x\leqslant 1\end{cases}$$

都是方程的过点(0,0)而定义于区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的解,这里 c 是满足 $0<c<1$ 的任一数.

本章介绍的存在唯一性定理圆满地回答了上面提出的问题,它明确地肯定了方程的解在一定条件下的存在性和唯一性,它是常微分方程理论中最基本的定理,有其重大的理论意义.另一方面,由于能求得精确解的微分方程为数不多,微分方程的近似解法(包括数值解法)具有十分重要的实际意义,而解的存在和唯一又

是进行近似计算的前提.因为如果解根本不存在,却要去近似地求它,问题本身是没有意义的;如果有解存在而不唯一,由于不知道要确定是哪一个解,却要去近似地确定它,问题也是不明确的.解的存在唯一性定理保证了所要求的解的存在和唯一,因此它也是近似求解法的前提和理论基础.此外,我们将看到在定理的证明过程中还具体地提供了求近似解的途径,这就更增添了存在唯一性定理的实用意义.

由于种种条件的限制,实际测出的初始数据往往是不精确的,它只能近似地反映初始状态.因此我们以它作为初值条件所得到的解是否能用作真正的解呢?这就产生了解对初值的连续依赖性问题,即当初值微小变动时,方程的解的变化是否也是很小呢?如果不然的话,这样所求得的解就失去实用的意义,因它可能与实际情况产生很大的误差.即使给出的初值问题能满足解的存在唯一性条件及相关性质,但往往很难或不能求得精确的解析解,又能否求出其数值形式的数值解?

本章重点介绍和证明一阶微分方程的解的存在唯一性定理,并叙述解的一些一般性质,如解的延拓、解对初值的连续性和可微性等.此外,还引进奇解的概念及介绍求奇解的两个方法,并介绍两个最常用且最基础的数值解法.

§3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法

3.1.1 存在唯一性定理

1. 首先考虑导数已解出的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{3.1}$$

这里 $f(x,y)$是在矩形域

$$R:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b \tag{3.2}$$

上的连续函数.

函数 $f(x,y)$称为在 R 上关于 y 满足**利普希茨**(Lipschitz)**条件**,如果存在常数 $L>0$,使得不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

对于所有$(x,y_1),(x,y_2)\in R$ 都成立,L 称为**利普希茨常数**.

定理 1 如果 $f(x,y)$ 在矩形域 R 上连续且关于 y 满足利普希茨条件,则方程(3.1)存在唯一的解 $y=\varphi(x)$,定义于区间 $|x-x_0|\leqslant h$上,连续且满足初值条件

$$\varphi(x_0)=y_0, \tag{3.3}$$

这里 $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right),M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

我们采用皮卡(Picard)的逐步逼近法来证明这个定理.为了简单起见,只就区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 进行讨论,对于 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0$的讨论完全一样.

现在先简单叙述一下运用逐步逼近法证明定理的主要思想.首先证明求微分方程的初值问题的解等价于求积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

的连续解,再证明积分方程的解的存在唯一性.

任取一个连续函数 $\varphi_0(x)$代入上面积分方程右端的 y,就得到函数

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_0(x))\mathrm{d}x,$$

显然 $\varphi_1(x)$也是连续函数.如果 $\varphi_1(x)=\varphi_0(x)$,那么 $\varphi_0(x)$就是积分方程的解.否则,我们又把 $\varphi_1(x)$代入积分方程右端的 y,得到

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_1(x))\mathrm{d}x.$$

如果 $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)$,那么 $\varphi_1(x)$就是积分方程的解.否则,我们

继续这个步骤.一般地作函数

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))\mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

这样就得到连续函数序列

$$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$$

如果 $\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)$,那么 $\varphi_n(x)$就是积分方程的解.如果始终不发生这种情况,我们可以证明上面的函数序列有一个极限函数 $\varphi(x)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

存在,因而对(3.4)取极限时,就得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)&=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))\mathrm{d}x\\&=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(x,\varphi_{n-1}(x))\mathrm{d}x\\&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,$$

这就是说,$\varphi(x)$是积分方程的解.这种一步一步地求出方程的解的方法就称为**逐步逼近法**.由(3.4)确定的函数 $\varphi_n(x)$称为初值问题(3.1),(3.3)的**第 n 次近似解**.在定理的假设条件下,以上的步骤是可以实现的.下面我们分五个命题来证明定理.

命题 1 设 $y=\varphi(x)$是方程(3.1)的定义于区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上,满足初值条件

$$\varphi(x_0)=y_0 \tag{3.3}$$

的解,则 $y=\varphi(x)$是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)\mathrm{d}x,\quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h \tag{3.5}$$

的定义于 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 上的连续解．反之亦然．

证明　因为 $y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的解，故有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,\varphi(x)),$$

两边从 x_0 到 x 取定积分得到

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h,$$

把(3.3)代入上式，即有

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x,\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h,$$

因此，$y=\varphi(x)$ 是(3.5)的定义于 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 上的连续解．

反之，如果 $y=\varphi(x)$ 是(3.5)的连续解，则有

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\mathrm{d}x, x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h,\quad (3.6)$$

微分之，得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,\varphi(x)),$$

又把 $x=x_0$ 代入(3.6)，得到

$$\varphi(x_0)=y_0,$$

因此，$y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)的定义于 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 上，且满足初值条件(3.3)的解．命题 1 证毕．

现在取 $\varphi_0(x)=y_0$，构造皮卡逐步逼近函数序列如下：

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h \\ \qquad\qquad (n=1,2,\cdots).\end{cases}\quad (3.7)$$

命题 2　对于所有的 n，(3.7)中函数 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant b. \tag{3.8}$$

证明 当 $n=1$ 时，$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi$. 显然 $\varphi_1(x)$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$上有定义、连续且有

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi\right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(\xi,y_0)|\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b,\end{aligned}$$

即命题 2 当 $n=1$ 时成立. 现在我们用数学归纳法证明对于任何正整数 n，命题 2 都成立. 为此，设命题 2 当 $n=k$ 时成立，也即 $\varphi_k(x)$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_k(x)-y_0|\leqslant b,$$

这时，

$$\varphi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_k(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

由假设，命题 2 当 $n=k$ 时成立，知道 $\varphi_{k+1}(x)$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义、连续且有

$$\begin{aligned}|\varphi_{k+1}(x)-y_0| &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_k(\xi))|\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b,\end{aligned}$$

即命题 2 当 $n=k+1$ 时也成立. 由数学归纳法得知命题 2 对于所有 n 均成立. 命题 2 证毕.

命题 3 函数序列$\{\varphi_n(x)\}$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上是一致收敛的.

证明 我们考虑级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)],\quad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h, \tag{3.9}$$

它的部分和为

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]=\varphi_n(x),$$

因此,要证明函数序列$\{\varphi_n(x)\}$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛,只须证明级数(3.9)在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛.为此,我们进行如下的估计,由(3.7)有

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))|\mathrm{d}\xi\leqslant M(x-x_0) \tag{3.10}$$

及

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))|\mathrm{d}\xi$$

利用利普希茨条件及(3.10),得到

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant L\int_{x_0}^{x}M(\xi-x_0)\mathrm{d}\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2.$$

设对于正整数 n,不等式

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$$

成立,则由利普希茨条件,当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时,有

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant\frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

于是,由数学归纳法得知,对于所有的正整数 k,有如下的估计:

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k, x_0\leqslant x\leqslant x_0+h, \tag{3.11}$$

从而可知，当 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 时

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}h^k. \tag{3.12}$$

(3.12)的右端是正项收敛级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$$

的一般项. 由魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法(简称魏氏判别法)，级数(3.9)在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛，因而序列$\{\varphi_n(x)\}$也在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛. 命题 3 证毕.

现设

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x),$$

则 $\varphi(x)$也在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上连续，且由(3.8)又可知

$$|\varphi(x)-y_0|\leqslant b.$$

命题 4 $\varphi(x)$是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解.

证明 由利普希茨条件

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|\leqslant L|\varphi_n(x)-\varphi(x)|$$

以及$\{\varphi_n(x)\}$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$，即知序列$\{f(x,\varphi_n(x))\}$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $f(x,\varphi(x))$. 因而，对(3.7)两边取极限，得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)&=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi\\&=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi,$$

这就是说,$\varphi(x)$是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的连续解.命题 4 证毕.

命题 5 设 $\psi(x)$是积分方程(3.5)的定义于 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的另一个连续解,则 $\varphi(x)=\psi(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_0+h)$.

证明 我们证明 $\psi(x)$也是序列$\{\varphi_n(x)\}$的一致收敛极限函数.为此,从

$$\varphi_0(x)=y_0,$$

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi \quad (n\geqslant 1),$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\psi(\xi))\mathrm{d}\xi,$$

可以进行如下的估计

$$|\varphi_0(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x} |f(\xi,\psi(\xi))|\mathrm{d}\xi\leqslant M(x-x_0),$$

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-\psi(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_0(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x} |\varphi_0(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant ML\int_{x_0}^{x} (\xi-x_0)\mathrm{d}\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2.\end{aligned}$$

现设$|\varphi_{n-1}(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$,则有

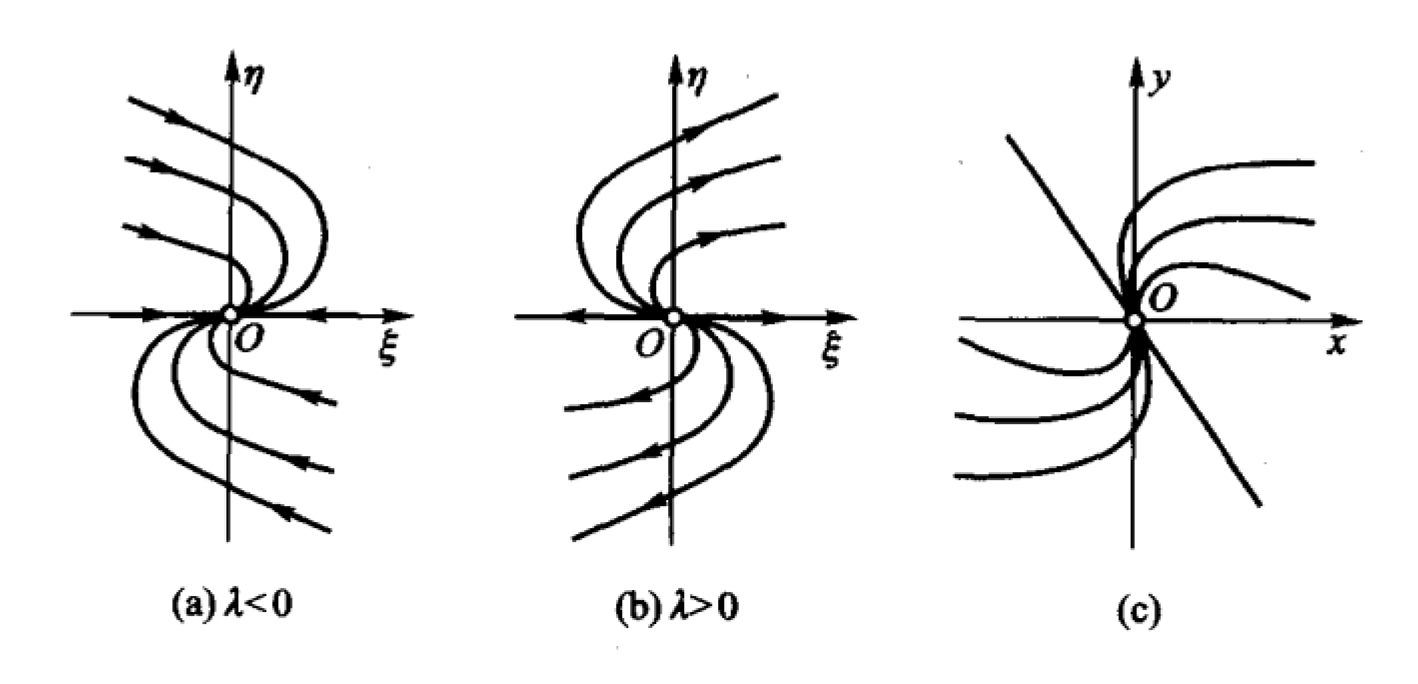
$$\begin{aligned}|\varphi_n(x)-\psi(x)|&\leqslant\int_{x_0}^{x} |f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant L\int_{x_0}^{x} |\varphi_{n-1}(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x} (\xi-x_0)^n\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

当 $\lambda<0$ 时，显然有 $\xi(t)\to 0$，$\eta(t)\to 0$（当 $t\to+\infty$），因而方程的零解是渐近稳定的．又由(6.43)知，当 $A=0$ 时，ξ 轴左、右半轴本身也是轨线，而当 $A\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{A}{At+B}\longrightarrow 0(\text{当 } t\to\infty),$$

且当 $t=-\dfrac{B}{A}$ 时，$\xi(t)=0$，可知轨线越过 η 轴而切 ξ 轴于原点，如图(6.6a)所示．所有轨线毫无例外地沿同一个方向（ξ 轴）趋于奇点，其附近轨线具有这种性态的奇点称为**退化结点**．在些情形，奇点是稳定的，因此更称为**稳定退化结点**．

假若 $\lambda>0$，这时只要将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，则前面讨论仍然有效．轨线性态如图(6.6b)所示，奇点是**不稳定退化结点**．



图(6.6)　退化结点

(2) $b=c=0$，这时方程组(6.36)取形式

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\quad \frac{dy}{dt}=\lambda y,\quad \lambda=a=d,$$

其解为

$$x(t)=Ae^{\lambda t},\quad y(t)=Be^{\lambda t},$$

于是

时，积分曲线上的点$(x,\varphi(x))$的纵坐标满足不等式

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|\varphi(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|\leqslant b.$$

也就是说，积分曲线弧夹在域 B_1PC_1 及 BPC 的内部，当然，也就不超出矩形 R. 命题 2 中所有函数 $y=\varphi_n(x)$ 都可在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$上确定，它的图形都夹在域 BPC 的内部，自然，它的极限图形即积分曲线 $y=\varphi(x)$也不超出域 BPC 的范围.

附注 2 由于利普希茨条件比较难于检验，常用 $f(x,y)$在 R 上有对 y 的连续偏导数来代替. 事实上，如果在 R 上$\frac{\partial f}{\partial y}$存在且连续，则$\frac{\partial f}{\partial y}$在$R$ 上有界. 设在 R 上 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant L$ 这时

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f(x,y_2+\theta(y_1-y_2))}{\partial y}\right||y_1-y_2|$$

$$\leqslant L|y_1-y_2|,$$

这里$(x,y_1),(x,y_2)\in R, 0<\theta<1$. 但反过来满足利普希茨条件的函数 $f(x,y)$不一定有偏导数存在. 例如，函数 $f(x,y)=|y|$在任何区域都满足利普希茨条件，但它在 $y=0$ 处没有导数.

附注 3 设方程(3.1)是线性的，即方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x), \tag{2.28}$$

那么容易知道，当 $P(x),Q(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上为连续时，定理 1 的条件就能满足.

不仅如此，这时由任一初值(x_0,y_0), $x_0\in[\alpha,\beta]$所确定的解在整个区间$[\alpha,\beta]$上都有定义.

事实上，对于一般方程(3.1)，由初值所确定的解只能定义在 $|x-x_0|\leqslant h$上，这是因为在构造逐步逼近函数序列$\{\varphi_n(x)\}$时，要求它不越出原来的矩形区域 R. 而现在，右端函数对 y 没有任何限制，为了证明我们的结论，譬如取 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|P(x)y_0+Q(x)|$，而逐字重复定理的证明过程，即可证由(3.7)所作出的函数序列

$\{\varphi_n(x)\}$在整个区间$[\alpha,\beta]$上都有定义和一致收敛.

2. 现在考虑一阶隐方程

$$F(x,y,y')=0, \tag{3.15}$$

根据隐函数存在定理,若于(x_0,y_0,y_0')的某一领域内 F 连续且 $F(x_0,y_0,y_0')=0$,而$\dfrac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$,则必可把 y'唯一地表为x,y 的函数

$$y'=f(x,y), \tag{3.16}$$

并且 $f(x,y)$于(x_0,y_0)的某一邻域内连续,且满足

$$y'_0=f(x_0,y_0).$$

更进一步,如果 F 关于所有变元存在连续偏导数,则 $f(x,y)$ 对 x,y 也存在连续偏导数,并且

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial y'}, \tag{3.17}$$

显然它是有界的. 于是依定理 1,方程(3.16)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$的解存在且唯一,即方程(3.15)的过点(x_0,y_0)且切线斜率为 y_0'的积分曲线存在且唯一①. 这样便得到下面的定理.

定理 2 如果在点(x_0,y_0,y'_0)的某一邻域中,

1° $F(x,y,y')$对所有变元(x,y,y')连续,且存在连续偏导数;

2° $F(x_0,y_0,y'_0)=0$;

3° $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,y'_0)}{\partial y'}\neq 0$,

则方程(3.15)存在唯一解

$$y=y(x),\ |x-x_0|\leqslant h \quad (h\text{ 为足够小的正数})$$

满足初值条件

---

① 这里关于解的存在唯一性是这样理解的:对任意给定的一组值(x_0,y_0,y'_0), $F(x_0,y_0,y'_0)=0$,方程(3.15)的沿已给方向 y'_0通过点(x_0,y_0)的积分曲线有且只有一条.

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0. \tag{3.18}$$

3.1.2 近似计算和误差估计

存在唯一性定理不仅肯定了解的存在唯一性，并且在证明中所采用的逐步逼近法在实用上也是求方程近似解的一种方法.在估计式(3.14)中令 $\psi(x)=\varphi(x)$，我们就得到第 n 次近似解 $\varphi_n(x)$ 和真正解 $\varphi(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 内的误差估计式

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{3.19}$$

这样，我们在进行近似计算时，可以根据误差的要求，选取适当的逐步逼近函数 $\varphi_n(x)$.

例 1 方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 定义在矩形域 $R:-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$ 上，试利用存在唯一性定理确定经过点(0,0)的解的存在区间，并求在此区间上与真正解的误差不超过 0.05 的近似解的表达式.

解 这里 $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=2$，$h$ 是 $a=1$ 及 $\dfrac{b}{M}=\dfrac{1}{2}$ 二数中的最小者，故 $h=\dfrac{1}{2}$，在 R 上函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的利普希茨常数可取为 $L=2$，因为

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|2y|\leqslant 2=L.$$

根据(3.19)

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{M}{L}\frac{1}{(n+1)!}(Lh)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}<0.05,$$

因而可取 $n=3$.事实上，$\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{20}=0.05$.我们可以作出如下的近似表达式

$$\varphi_0(x)=0,$$

$$\varphi_1(x)=\int_0^x[\xi^2+\varphi_0^2(\xi)]\mathrm{d}\xi=\frac{x^3}{3},$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x[\xi^2+\varphi_1^2(\xi)]\mathrm{d}\xi=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x)&=\int_0^x[\xi^2+\varphi_2^2(\xi)]\mathrm{d}\xi\\&=\int_0^x\left(\xi^2+\frac{\xi^6}{9}+\frac{2\xi^{10}}{189}+\frac{\xi^{14}}{3\,969}\right)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2\,079}+\frac{x^{15}}{59\,535},\end{aligned}$$

$\varphi_3(x)$就是所求的近似解.在区间$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$上,这个解与真正解的误差不会超过0.05.

习题 3.1

1. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y^2$通过点(0,0)的第三次近似解.

2. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2$通过点(1,0)的第二次近似解.

3. 求初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y^2,R:|x+1|\leqslant1,|y|\leqslant1,\\y(-1)=0\end{cases}$$

的解的存在区间,并求第二次近似解,给出在解的存在区间的误差估计.

4. 讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件,并求通过点(0,0)的一切解.

5. 叙述并用逐步逼近法证明关于一阶线性微分方程的解的存在唯一性定理.

6. 证明格朗沃尔(Gronwall)不等式：

设 K 为非负常数，$f(t)$和 $g(t)$为在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的连续非负函数，且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_{\alpha}^{t}f(s)g(s)\mathrm{d}s,\alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

则有

$$f(t)\leqslant K\exp\left(\int_{\alpha}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right),\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

并由此证明定理 1 的命题 5.

7. 假设函数 $f(x,y)$于(x_0,y_0)的邻域内是 y 的不增函数，试证方程(3.1)满足条件 $y(x_0)=y_0$的解于 $x\geqslant x_0$一侧最多只有一个.

8. 如果函数 $f(x,y)$于带域 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上连续且关于 y 满足利普希茨条件，则方程(3.1)满足条件 $y(x_0)=y_0$的解于整个区间$[\alpha,\beta]$上存在且唯一. 试证明之.

(提示：用逐步逼近法，取 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$.)

9. 设 $f(x)$定义于 $-\infty<x<+\infty$，满足条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant N|x_1-x_2|,$$

其中 $N<1$，证明方程 $x=f(x)$存在唯一的一个解.

(提示：任取 x_0，作逐步逼近点列 $x_{n+1}=f(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$，然后证明 x_n收敛于方程的唯一解.)

10. 给定积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad(*)$$

其中 $f(x)$是$[a,b]$上的已知连续函数，$K(x,\xi)$是 $a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的已知连续函数. 证明当$|\lambda|$足够小时(λ 是常数)，$(*)$在$[a,b]$上存在唯一的连续解.

(提示：作逐步逼近函数序列

$$\varphi_0(x)=f(x),$$

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,\xi)\varphi_n(\xi)\mathrm{d}\xi\ (n=0,1,2\cdots).)$$

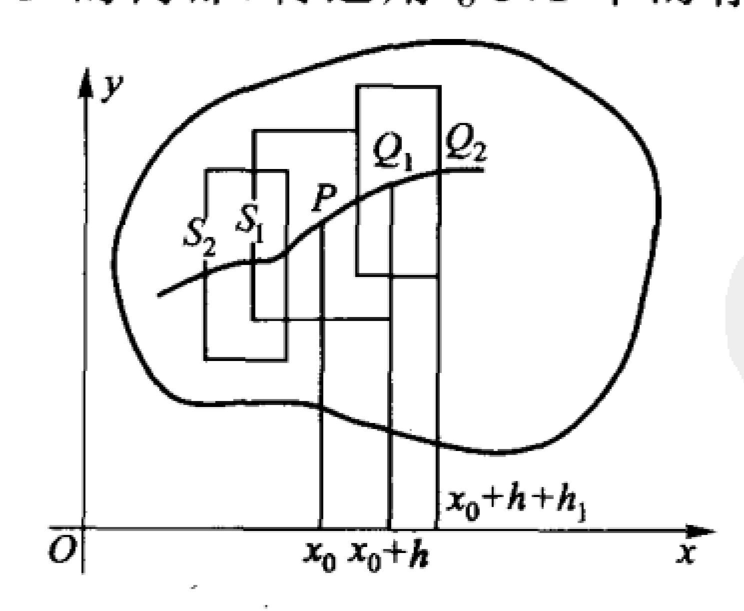
§3.2 解的延拓

§3.1 中解的存在唯一性定理是局部性的，它只肯定了解至

少在区间 $|x-x_0|\leqslant h$，$h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$上存在. 可能出现这样的情况，即随着 $f(x,y)$ 定义区域的增大，我们能肯定的解存在的区间反而缩小. 例如，3.1.2 中的例 1，当定义区域为 R：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$ 时，$h=\dfrac{1}{2}$；当定义区域为 R：$-2\leqslant x\leqslant 2$，$-2\leqslant y\leqslant 2$ 时，$M=8$，$h=\min\left(2,\dfrac{2}{8}\right)=\dfrac{1}{4}$. 这种局部性使我们感到非常不满意，而且实践上也要求解的存在区间能尽量扩大，解的延拓的概念就自然产生了. 下面讨论解的延拓的概念，通过它我们可以将 §3.1 中存在唯一性定理中的局部结果变为适用于较大的范围.

假设方程(3.1)右端函数 $f(x,y)$ 在某一区域 G 内连续，且关于 y 满足**局部的利普希茨条件**，即对于区域 G 内的每一点，有以其为中心的完全含于 G 内的闭矩形 R 存在，在 R 上 $f(x,y)$ 关于 y 满足利普希茨条件(对于不同的点，域 R 的大小和常数 L 可能不同).

设方程(3.1)的解 $y=\varphi(x)$ 已定义在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上，现在取 $x_1=x_0+h$，然后以 (x_1,y_1) 为中心，(这里 (x_1,y_1) 即图(3.2)中的 Q_1 点，$y_1=\varphi(x_0+h)$) 作一小的矩形，使它连同其边界都含在区域 G 的内部. 再运用 §3.1 中的存在唯一性定理，



图(3.2)

知道存在 $h_1>0$，使得在区间 $|x-x_1|\leqslant h_1$ 上，方程(3.1)有过 (x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$，且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x_1)=\varphi(x_1)$. 由于唯一性，显然在解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$ 都有定义的区间 $x_1-h_1\leqslant x\leqslant x_1$ 上，$\psi(x)=\varphi(x)$. 但是在区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_1+h_1$ 上，解 $y=\psi(x)$ 仍有定义，我们把它看成是原来定义在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的解 $y=\varphi(x)$ 向右方的**延拓**，这样，我们就在区间 $[x_0-h, x_0+h+h_1]$ 上确定方程的一个解

$$y=\begin{cases}\varphi(x), & x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h,\\ \psi(x), & x_0+h<x\leqslant x_0+h+h_1,\end{cases}$$

即将解延拓到较大的区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h+h_1$ 上. 再令 $x_2=x_1+h_1$, $y_2=\psi(x_1+h_1)$，如果 $(x_2,y_2)\in G$，我们又可以取 (x_2,y_2) 为中心，作一小矩形，使它连同其边界都含在区域 G 内. 仿前，又可以将解延拓到更大的区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_2+h_2=x_0+h+h_1+h_2$ 上，其中 h_2 是某一个正常数. 对于 x 值减小的一边可以同样讨论，使解向左方延拓. 用几何的语言来说，上述解的延拓，就是在原来的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 左右两端各接上一个积分曲线段(参看图(3.2)). 上述解的延拓的办法还可继续进行，最后我们将得到一个解 $y=\tilde{\varphi}(x)$，它已经再也不能向左右方继续延拓了. 这样的解称为方程(3.1)的**饱和解**. 任一饱和解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 的最大存在区间必定是一个开区间 $\alpha<x<\beta$. 因为如果这个区间的右端是闭的，那么 β 便是有限数，且点 $(\beta,\tilde{\varphi}(\beta))\in G$. 这样一来，解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 就还能继续向右方延拓，从而它是非饱和的. 对左端点 α 可同样讨论. 我们要问，究竟解 $y=\varphi(x)$ 向两边延拓的最终情况如何呢？这一问题可以由下面的解的延拓定理来回答.

现在我们不加证明地引进下面的定理.

解的延拓定理　如果方程(3.1)右端的函数 $f(x,y)$ 在有界区域 G 中连续，且在 G 内关于 y 满足局部的利普希茨条件，那么方程(3.1)的通过 G 内任何一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延

拓,直到点$(x,\varphi(x))$任意接近区域 G 的边界. 以向 x 增大的一方的延拓来说,如果 $y=\varphi(x)$只能延拓到区间 $x_0\leqslant x<d$ 上,则当 $x\to d$ 时,$(x,\varphi(x))$趋于区域 G 的边界.

推论 如果 G 是无界区域,在上面解的延拓定理的条件下,方程(3.1)的通过点(x_0,y_0)的解 $y=\varphi(x)$可以延拓,以向 x 增大的一方的延拓来说,有下面的两种情况:

(1) 解 $y=\varphi(x)$可以延拓到区间$[x_0,+\infty)$;

或

(2) 解 $y=\varphi(x)$只可以延拓到区间$[x_0,d)$,其中 d 为有限数,则当 $x\to d$ 时,或者 $y=\varphi(x)$无界,或者点$(x,\varphi(x))$趋于区域 G 的边界.

例 1 讨论方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-1}{2}$的分别通过点$(0,0)$,$(\ln 2,-3)$的解的存在区间.

解 此方程右端函数确定在整个 Oxy 平面上且满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理的条件. 容易确定此方程的通解为 $y=\dfrac{1+c\mathrm{e}^x}{1-c\mathrm{e}^x}$. 故通过点$(0,0)$的解为 $y=\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$,这个解的存在区间为$-\infty<x<+\infty$. 通过点$(\ln 2,-3)$的解为 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$,这个解的存在区间为$0<x<+\infty$(参看图(3.3)). 注意,通过点$(\ln 2,-3)$的解 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$向右方可以延拓到$+\infty$,但对于 x 减少的一方来说,向左方只能延拓到 0,因为当$x\to 0_+$ 时,$y\to-\infty$. 这相当于解的延拓定理推论中(2)的第一种情况.

例 2 讨论方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\ln x$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解的存在区间.

解 方程右端函数于右半平面 $x>0$ 上有定义且满足解的延拓定理的条件. 这里区域 G(右半平面)是无界开域,y 轴是它的边

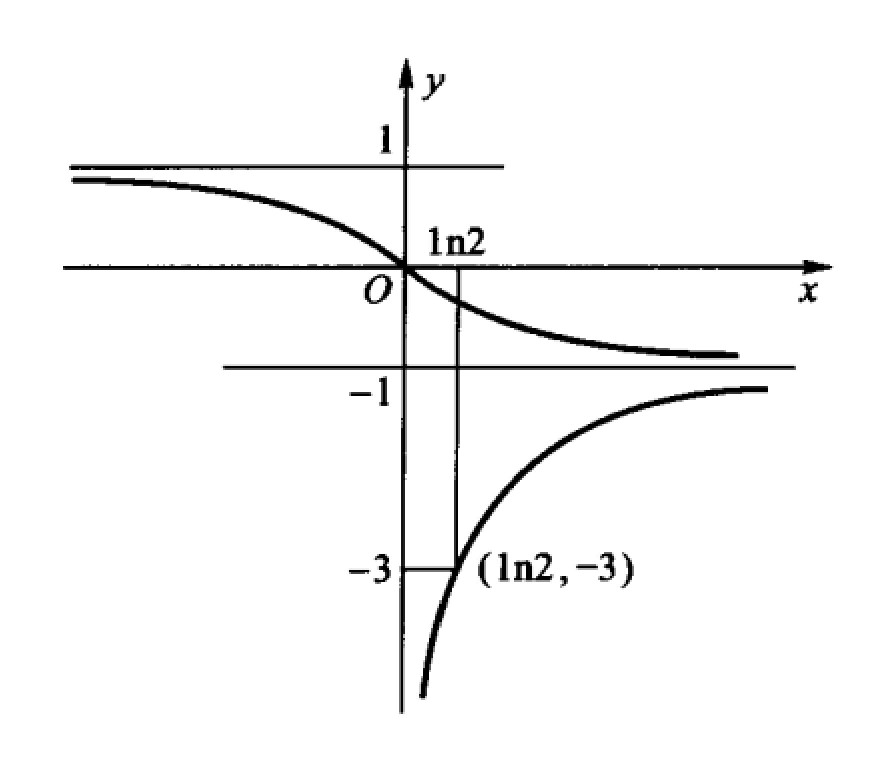


图 (3.3)

界.容易求得问题的解 $y=x\ln x$，它于区间 $0<x<+\infty$ 上有定义、连续且当 $x\to 0$ 时 $y\to 0$，即所求问题的解向右方可以延拓到 $+\infty$，但向左方只能延拓到 0，且当 $x\to 0$ 时积分曲线上的点 (x,y) 趋向于区域 G 的边界上的点，这对应于延拓定理推论中(2)的第二种情况.

最后我们指出，应用上述定理推论的结果不难证明：如果函数 $f(x,y)$ 于整个 Oxy 平面上有定义、连续和有界，同时存在关于 y 的一阶连续偏导数，则方程(3.1)的任一解均可以延拓到区间 $-\infty<x<+\infty$.

§3.3 解对初值的连续性和可微性定理

在§3.1存在唯一性定理的证明中，我们把初值 (x_0,y_0) 看作固定的.显然，假如 (x_0,y_0) 变动，则相应的初值问题的解也将随之变动，也就是说，初值问题的解不单依赖于自变量 x，同时也依赖于初值 (x_0,y_0).因此，在考虑初值变动时，解可以看作三个变元的函数而记为

$$y=\varphi(x,x_0,y_0),$$

它满足 $y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$.

下面我们着重讨论解关于初值的一些基本性质.

3.3.1 解关于初值的对称性

解关于初值的对称性定理 设方程(3.1)的满足初值条件 $y(x_0)=y_0$的解是唯一的,记为 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$,则在此表达式中,(x,y)与(x_0,y_0)可以调换其相对位置,即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0=\varphi(x_0,x,y).$$

证明 在上述解的存在区间内任取一值 x_1,且记 $y_1=\varphi(x_1,x_0,y_0)$,则由解的唯一性知过点(x_1,y_1)的解与过点(x_0,y_0)的解是同一条积分曲线,即此解也可写为

$$y=\varphi(x,x_1,y_1),$$

并且,显然有 $y_0=\varphi(x_0,x_1,y_1)$. 注意到点(x_1,y_1)是积分曲线上任意一点,因此关系式 $y_0=\varphi(x_0,x,y)$对该积分曲线上的任意点(x,y)均成立,这就证实了我们的论断.

3.3.2 解对初值的连续依赖性

首先我们证明下面的引理.

引理 如果函数 $f(x,y)$于某域 D 内连续,且关于 y 满足利普希茨条件(利普希茨常数为 L),则对方程(3.1)的任意两个解 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$,在它们公共存在的区间内成立着不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\varphi(x_0)-\psi(x_0)|e^{L|x-x_0|}, \qquad (3.20)$$

其中 x_0为所考虑区间内的某一值.

证明 设 $\varphi(x),\psi(x)$于区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上均有定义,令

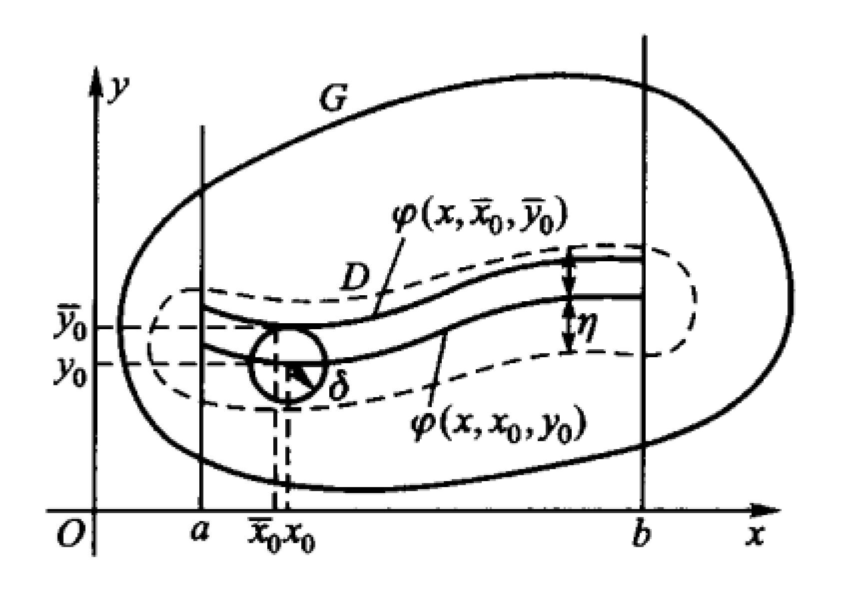
$$V(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]^2,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则

$$V'(x)=2[\varphi(x)-\psi(x)][f(x,\varphi)-f(x,\psi)]\leqslant 2LV(x),$$
于是
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(V(x)\mathrm{e}^{-2Lx})\leqslant 0.$$
因此,对 $x_0\in[a,b]$,有
$$V(x)\leqslant V(x_0)\mathrm{e}^{2L(x-x_0)},\quad x_0\leqslant x\leqslant b.$$
对于区间 $a\leqslant x\leqslant x_0$,令 $-x=t$,并记 $-x_0=t_0$,则方程(3.1)变为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(-t,y),$$
并且已知它有解 $y=\varphi(-t)$和 $y=\psi(-t)$.

类似上述推演过程,令 $\sigma(t)=[\varphi(-t)+\psi(-t)]^2$,可得
$$\sigma(t)\leqslant\sigma(t_0)\mathrm{e}^{2L(t-t_0)},\quad t_0\leqslant t\leqslant -a,$$
注意到 $\sigma(t)|_{t=-x}=V(x)$及 $\sigma(t_0)=V(x_0)$,就有
$$V(x)\leqslant V(x_0)\mathrm{e}^{2L(x_0-x)},\quad a\leqslant x\leqslant x_0.$$
因此
$$V(x)=V(x_0)\mathrm{e}^{2L|x-x_0|},\quad a\leqslant x,x_0\leqslant b,$$
两边取平方根即得(3.20).

解对初值的连续依赖定理 假设 $f(x,y)$于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件,$(x_0,y_0)\in G$,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$是方程(3.1)的满足初值条件 $y(x_0)=y_0$的解,它于区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义($a\leqslant x_0\leqslant b$),那么,对任意给定的 $\varepsilon>0$,必能找到正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$,使得当
$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$$
时,方程(3.1)的满足条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上也有定义,并且
$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\varepsilon,\quad a\leqslant x\leqslant b$$
(参看图(3.4)).



图(3.4)

证明 首先,注意到积分曲线段 $S: y=\varphi(x,x_0,y_0)\equiv\varphi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$是 Oxy 平面上一个有界闭集,又按假定对 S 上每一点(x,y)必存在一个以它为中心的开圆 C,$C\subset G$,使在其内的函数 $f(x,y)$关于 y 满足利普希茨条件.因此,根据有限覆盖定理,可以找到有限个具有这种性质的圆 $C_i(i=1,2,\cdots,N)$,并且它们的全体覆盖了整个积分曲线段 S.设 r_i 为圆 C_i 的半径,L_i 为 $f(x,y)$于 C_i 内的相应的利普希茨常数.令 $\tilde{G}=\bigcup\limits_{i=1}^{N}C_i$,则有 $S\subset\tilde{G}\subset G$,且 $\tilde{G}$ 的边界与 S 的距离 $\rho>0$.对预先给定的 $\varepsilon>0$,若取

$$\eta=\min(\varepsilon,\rho/2)\quad 及\quad L=\max(L_1,L_2,\cdots,L_N),$$

则以 S 上每一点为中心,以 η 为半径的圆的全体,连同它们的圆周一起构成包含 S 的有界闭域 $D\subset G$,且 $f(x,y)$在 D 上关于 y 满足利普希茨条件,利普希茨常数为 L.

其次,我们断言,必存在这样的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)(\delta<\eta)$,使得只要 $\bar{x}_0,\bar{y}_0$满足不等式

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2,$$

则解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\equiv\psi(x)$必然在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上也有定义.

事实上,由于 D 是一个有界闭域,且 $f(x,y)$于其内关于 y

满足利普希茨条件,由上面延拓定理知道,解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$必能延拓到区域 D 的边界上.设它在 D 的边界上的点为$(c,\psi(c))$和$(d,\psi(d))$,$c<d$,这时必然有 $c\leqslant a,d\geqslant b$.因为否则设 $c>a$,$d<b$,则由引理就有

$$|\psi(x)-\varphi(x)|\leqslant|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(\bar{x}_0)|\mathrm{e}^{L|x-\bar{x}_0|},\quad c\leqslant x\leqslant d.$$

注意到 $\varphi(x)$的连续性,对 $\delta_1=\dfrac{1}{2}\eta\mathrm{e}^{-L(b-a)}$,必有 $\delta_2>0$ 存在,使当$|x-x_0|\leqslant\delta_2$时,有$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\delta_1$.取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,则当$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$时,就有

$$\begin{aligned}|\psi(x)-\varphi(x)|^2&\leqslant|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(\bar{x}_0)|^2\mathrm{e}^{2L|x-\bar{x}_0|}\\&\leqslant(|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|+|\varphi(x_0)-\varphi(\bar{x}_0)|)^2\mathrm{e}^{2L|x-\bar{x}_0|}\\&\leqslant2(|\psi(\bar{x}_0)-\varphi(x_0)|^2+|\varphi(x_0)-\varphi(\bar{x}_0)|^2)\mathrm{e}^{2L|x-\bar{x}_0|}\\&<2(|\bar{y}_0-y_0|^2+\delta_1^2)\mathrm{e}^{2L(b-a)}\\&\leqslant4\delta_1^2\mathrm{e}^{2L(b-a)}=\eta^2,\quad c\leqslant x\leqslant d,\end{aligned}\tag{3.21}$$

于是$|\psi(x)-\varphi(x)|<\eta$ 对一切 $x\in[c,d]$成立,特别地有

$$|\psi(c)-\varphi(c)|<\eta,\quad|\psi(d)-\varphi(d)|<\eta,$$

即点$(c,\psi(c))$及$(d,\psi(d))$均落在域 D 的内部,而不可能位于 D 的边界上.这与假设矛盾,因此,解 $\psi(x)$在区间$[a,b]$上有定义.

在不等式(3.21)中将区间$[c,d]$换成$[a,b]$,可知,当$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$时就有

$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\eta\leqslant\varepsilon,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

这正是所要证的结论.

附注 当把解 $\varphi(x,x_0,y_0)$视为自变量 x 和初值(x_0,y_0)的三元函数时,从上述定理可以推知它是三元连续函数.事实上,$\varphi(x,x_0,y_0)$对 x 在闭区间$[a,b]$上连续,因而对任给 $\varepsilon>0$,必能找到 $\delta_1>0$,使得当$|\bar{x}-x|<\delta_1$时,有

$$|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\bar{x},x\in[a,b].$$

另一方面，由解对初值的连续依赖定理，总存在这样的 $\delta_2>0$，使当 $(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta_2^2$ 时，有

$$|\varphi(x,x_0,y_0)-\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad x\in[a,b].$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则只要 $(\bar{x}-x)^2+(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\leqslant\delta^2$，就有

$$\begin{aligned}&|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\ \leqslant&|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(\bar{x},x_0,y_0)|+|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 (x,x_0,y_0) 连续.

对于任一 $(x_0,y_0)\in G$，由解的存在唯一性定理及解的延拓定理得知，存在 $\alpha(x_0,y_0)$，$\beta(x_0,y_0)$ 使得(3.1)有饱和解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 定义于 $\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0)$ 上. 令

$$V=\{(x,x_0,y_0)\,|\,\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0),(x_0,y_0)\in G\},$$

这时，解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为三元函数存在于 V 上，我们可以推得 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 V 上是连续的.

事实上，任给 $(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\in V$，解 $y=\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ 作为 x 的函数，它的最大存在区间必会包含 $\tilde{x}$，$\tilde{x}_0$. 所以存在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$，使得 $\varphi(x,\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ 在其上有定义，其中 $a<\tilde{x},\tilde{x}_0<b$. 由附注即知 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 $(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ 连续. 再注意到 $(\tilde{x},\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\in V$ 的任意性，我们可将解对初值的依赖关系用下面定理来表述.

解对初值的连续性定理 若函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且关于 y 满足局部利普希茨条件，则方程(3.1)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的.

我们还可以讨论含有参数 λ 的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),\qquad (3.1)_\lambda$$

用 G_λ 表示域：

$$G_\lambda:(x,y)\in G,\quad \alpha<\lambda<\beta.$$

设 $f(x,y,\lambda)$在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内一致地关于 y 满足局部的利普希茨条件，也就是说，对 G_λ 内的每一点(x,y,λ)都存在以(x,y,λ)为中心的球 $C\subset G_\lambda$，使得对任何(x,y_1,λ)，$(x,y_2,\lambda)\in C$，成立不等式

$$|f(x,y_1,\lambda)-f(x,y_2,\lambda)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 L 是与 λ 无关的正数. 由解的存在唯一性定理，对每一 $\lambda_0\in(\alpha,\beta)$，方程$(3.1)_\lambda$ 的通过点$(x_0,y_0)\in G$ 的解唯一确定. 我们把这个解记为 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$，于是有 $y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda_0)$.

类似地，我们可以得到下面的结果：

解对初值和参数的连续依赖定理 设 $f(x,y,\lambda)$在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致地满足局部的利普希茨条件，$(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda$，$y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$是方程$(3.1)_\lambda$ 通过点(x_0,y_0)的解，在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义，其中 $a\leqslant x_0\leqslant b$，那么，对任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$，使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\leqslant\delta^2$$

时，方程$(3.1)_\lambda$ 通过点$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$上也有定义，并且

$$|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)-\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)|<\varepsilon,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

解对初值和参数的连续性定理 设 $f(x,y,\lambda)$在 G_λ 内连续，且在 G_λ 内关于 y 一致地满足局部的利普希茨条件，则方程$(3.1)_\lambda$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$作为 x,x_0,y_0,λ 的函数在它的存在范围内是连续的.

3.3.3 解对初值的可微性

进一步，我们讨论解对初值的可微性，即解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$

关于初值(x_0,y_0)的偏导数的存在性和连续性.我们有如下定理.

解对初值的可微性定理　若函数$f(x,y)$以及$\frac{\partial f}{\partial y}$都在区域$G$内连续,则方程(3.1)的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为$x,x_0,y_0$的函数在它的存在范围内是连续可微的.

证明　由$\frac{\partial f}{\partial y}$在区域$G$内连续,推知$f(x,y)$在$G$内关于$y$满足局部利普希茨条件.因此,在定理的条件下,解对初值的连续性定理成立,即$y=\varphi(x,x_0,y_0)$在它的存在范围内关于x,x_0,y_0是连续的.下面进一步证明对于函数$\varphi(x,x_0,y_0)$的存在范围内任一点偏导数$\frac{\partial \varphi}{\partial x},\frac{\partial \varphi}{\partial x_0},\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$存在且连续.

先证$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$存在且连续.设由初值$(x_0,y_0)$和$(x_0+\Delta x_0,y_0)$($|\Delta x_0|\leqslant\alpha$,$\alpha$为足够小正数)①所确定的方程的解分别为

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)=\varphi \text{ 和 } y=\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0)=\psi,$$

即

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)\mathrm{d}x \text{ 和 } \quad \psi=y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}\psi-\varphi &= \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)\mathrm{d}x \\ &\quad +\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

---

① 这保证了φ和ψ同在某一区间上有定义,且当$\Delta x_0\to 0$时$\psi-\varphi\to 0$.显然当$\Delta x_0=0$时有$\psi=\varphi$.

其中 $0<\theta<1$. 注意到$\frac{\partial f}{\partial y}$及 φ,ψ 的连续性,我们有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1,$$

这里 r_1具有性质:当 $\Delta x_0\to 0$ 时 $r_1\to 0$,且当 $\Delta x_0=0$ 时 $r_1=0$. 类似地,有

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)\mathrm{d}x=-f(x_0,y_0)+r_2,$$

其中 r_2与 r_1具有相同性质,因此对 $\Delta x_0\neq 0$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}=&[-f(x_0,y_0)+r_2]\\&+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$$

是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r_2=z_0\end{cases}\tag{3.22}$$

的解,在这里 $\Delta x_0\neq 0$ 被看成参数. 显然,当 $\Delta x_0=0$ 时上述初值问题仍然有解. 根据解对初值和参数的连续性定理,知$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$是 x, $x_0,z_0,\Delta x_0$的连续函数,从而存在

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}.$$

而$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)\end{cases}$$

的解，不难求得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right),$$

显然它是 x, x_0, y_0 的连续函数.

同样可证$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$存在且连续.事实上，设 $y = \varphi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) = \tilde{\psi}$ 为初值$(x_0, y_0 + \Delta y_0)(|\Delta y_0| \leqslant \alpha)$所确定的解.类似上述的推演可证$\frac{\tilde{\psi} - \varphi}{\Delta y_0}$是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} + r_3\right]z, \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

的解.因而

$$\frac{\tilde{\psi} - \varphi}{\Delta y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} + r_3\right]\mathrm{d}x\right),$$

其中 r_3 具有性质：当 $\Delta y_0 \to 0$ 时 $r_3 \to 0$，且 $\Delta y_0 = 0$ 时 $r_3 = 0$.
故有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{\tilde{\psi} - \varphi}{\Delta y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}x\right),$$

它是 x, x_0, y_0 的连续函数.

至于$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$的存在及连续性，只需注意到 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是方程的解，因而

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, \varphi(x, x_0, y_0)),$$

由 f 及 φ 的连续性即直接推得结论.

习题 3.3

1. 假设函数 $f(x,y)$ 及$\frac{\partial f}{\partial y}$都在区域 G 内连续，又 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是方

程(3.1)满足初始条件 $\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$ 的解,试证 $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续,并写出其表达式.

2. 假设函数 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 于区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$$

的解,$y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$. 试求 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$,$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 及 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$,并从解的表达式出发,利用对参数求导数的方法,检验所得结果.

3. 给定方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin\left(\frac{y}{x}\right),$$

试求 $\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$,$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ 在 $x_0=1,y_0=0$ 时的表达式.

4. 设 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(\lambda xy),\quad \varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的饱和解,这里 λ 是参数,求 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$,$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 在 $(x,0,0,1)$ 处的表达式.

* §3.4 奇　　解

3.4.1 包络和奇解

从§2.4 例 2 中我们看到对某些微分方程,存在一条特殊的积分曲线,它并不属于这方程的积分曲线族. 但是,在这条特殊的积分曲线上的每一点处,都有积分曲线族中的一条曲线和它在此点相切. 在几何学上,这条特殊的积分曲线称为上述积分曲线族的**包络**. 在微分方程里,这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的**奇解**.

我们现在给出曲线族的包络的定义,并介绍它的求法.

设给定单参数曲线族

$$\Phi(x,y,c)=0, \tag{3.23}$$

其中 c 是参数，$\Phi(x,y,c)$ 是 x,y,c 的连续可微函数．曲线族(3.23)的**包络**是指这样的曲线，它本身并不包含在曲线族(3.23)中，但过这曲线的每一点，有曲线族(3.23)中的一条曲线和它在这点相切．

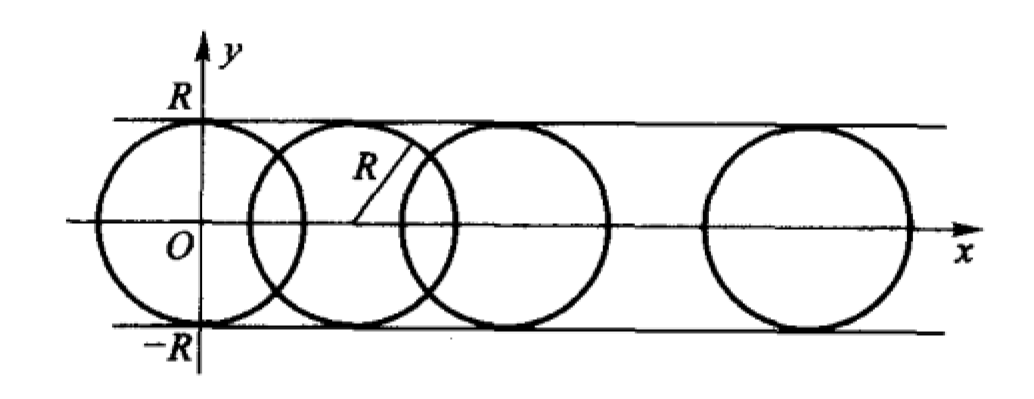
例如，单参数曲线族

$$(x-c)^2+y^2=R^2$$

（这里 R 是常数，c 是参数）表示圆心为 $(c,0)$ 而半径等于 R 的一族圆．此曲线族显然有包络

$$y=R \quad 和 \quad y=-R$$

（见图(3.5)）．



图(3.5)

但是，一般的曲线族并不一定有包络，例如同心圆族，平行直线族都是没有包络的．

由微分几何学可知，曲线族(3.23)的包络包含在由下列方程组

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \Phi_c'(x,y,c)=0\end{cases} \tag{3.24}$$

消去 c 而得到的曲线之中．此曲线称为(3.23)的 **c－判别曲线**．必须注意，在 c－判别曲线中有时除去包络外，还有其他曲线．c－判别曲线中究竟哪一条是包络尚需实际检验．

例 1 求直线族

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{3.25}$$

的包络,这里 α 是参数,p 是常数.

解 将(3.25)对 α 求导数,得到

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \tag{3.26}$$

为了从(3.25),(3.26)中消去 α,将(3.25)移项,然后平方,有

$$x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha=p^2, \tag{3.27}$$

将(3.26)平方,又得

$$x^2\sin^2\alpha+y^2\cos^2\alpha-2xy\cos\alpha\sin\alpha=0. \tag{3.28}$$

将(3.27)和(3.28)相加,得到

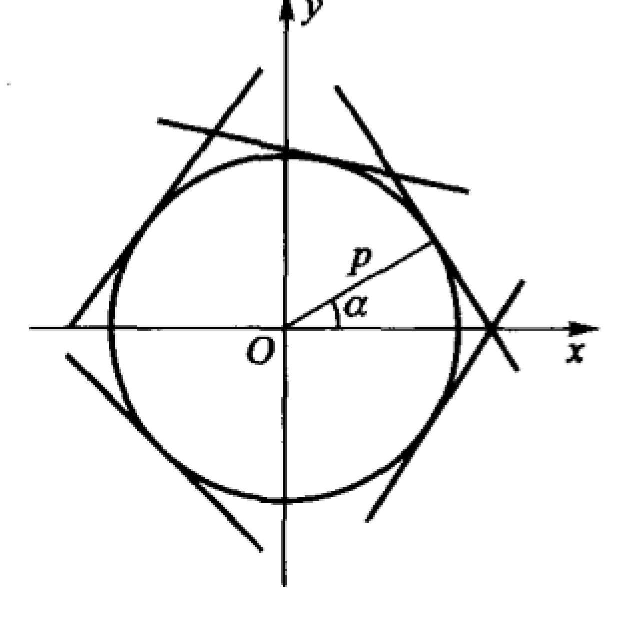
$$x^2+y^2=p^2, \tag{3.29}$$

容易检验,(3.29)是直线族(3.25)的包络(见图(3.6)).

例 2 求曲线族

$$(y-c)^2-\frac{2}{3}(x-c)^3=0 \tag{3.30}$$

的包络.



图(3.6)

解 将(3.30)对 c 求导数,得到

$$-2(y-c)+\frac{2}{3}\cdot 3(x-c)^2=0,$$

即

$$y-c-(x-c)^2=0. \tag{3.31}$$

为了从(3.30)及(3.31)消去 c,将(3.31)代入(3.30),得

$$(x-c)^4-\frac{2}{3}(x-c)^3=0,$$

即

$$(x-c)^3\left[(x-c)-\frac{2}{3}\right]=0,$$

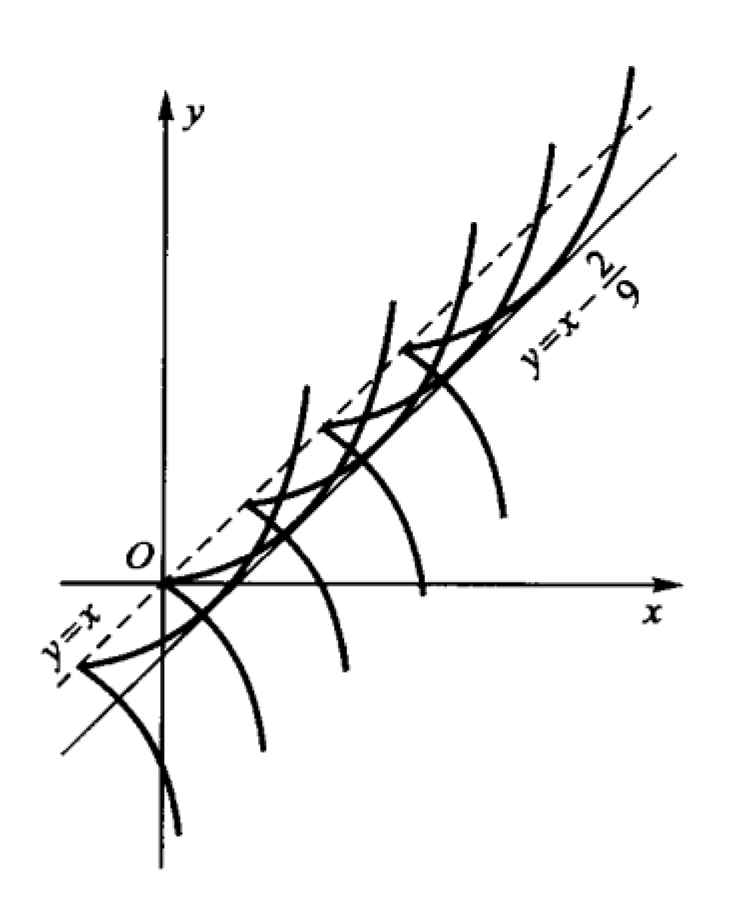
从 $x-c=0$ 得到

$$y = x;\tag{3.32}$$

从 $x - c - \frac{2}{3} = 0$ 得到

$$y = x - \frac{2}{9}.\tag{3.33}$$

因此,c - 判别曲线包括两条曲线(3.32)和(3.33),容易检验直线 $y = x$ 不是包络,而直线 $y = x - \frac{2}{9}$ 是包络(见图(3.7)).



图(3.7)

我们现在引进奇解的概念.微分方程的某一个解称为奇解,如果在这个解的每一点上至少还有方程的另外一个解存在,也就是说奇解是这样的一个解,在它上面的每一点唯一性都不成立.或者说,奇解对应的曲线上每一点至少有方程的两条积分曲线通过.

从奇解的定义容易知道一阶微分方程的通解的包络(如果它存在的话)一定是奇解;反之,微分方程的奇解(若存在的话)也是微分方程的通解的包络.因而,为了求微分方程的奇解,可以先求出它的通解,然后求通解的包络.

例如,我们为了求§2.4 例 2 的奇解,可以从通解(2.67)出

发,容易求出它的包络就是 $y=x^2/4$,因而,$y=x^2/4$ 就是方程的奇解.

这里介绍另外一种求奇解的方法.

由存在唯一性定理 2 知道,如果 $F(x,y,y')$关于 x,y,y'连续可微,则只要$\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$ 就能保证解的唯一性,因此,奇解(存在的话)必须同时满足下列方程

$$F(x,y,y')=0,\quad \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0.$$

于是我们有下面结论:

方程

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \tag{3.34}$$

的奇解包含在由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0,\\ F'_p(x,y,p)=0\end{cases} \tag{3.35}$$

消去 p 而得到的曲线中,这里 $F(x,y,p)$是 x,y,p 的连续可微函数.此曲线称为方程(3.34)的 p - **判别曲线**. p - 判别曲线是否是方程的奇解,尚需进一步检验.

例 3 求方程$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+y^2-1=0$ 的奇解.

解 从

$$\begin{cases}p^2+y^2-1=0,\\ 2p=0\end{cases}$$

消去 p 得到 p - 判别曲线

$$y=\pm 1.$$

容易验证,此两直线都是方程的奇解.因为容易求得原方程的通解为

$$y=\sin(x+c),$$

而 $y=\pm 1$ 是微分方程的解,且正好是通解的包络.

例 4 求方程 $y=2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$ 的奇解.

解 从

$$\begin{cases}y=2xp-p^2,\\2x-2p=0\end{cases}$$

消去 p 得到 p - 判别曲线

$$y=x^2.$$

但 $y=x^2$ 不是方程的解,故此方程没有奇解.

应该强调指出,上面介绍的两种方法,只是提供求奇解的途径,所得 c - 判别曲线或 p - 判别曲线是不是奇解,必须进行检验.

3.4.2 克莱罗微分方程

形如

$$y=xp+f(p) \tag{3.36}$$

的方程,称为**克莱罗(Clairaut)微分方程**,这里 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $f(p)$ 是 p 的连续可微函数.

这是第二章 2.4.1 已讨论过的方程类型,由于这类方程有一些特殊的性质,我们在此再作进一步地讨论.

将(3.36)两边对 x 取导数,并以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$ 代入,即得

$$p=x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p+f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x+f'(p))=0.$$

如果 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$,则得到

$$p=c,$$

将它代入(3.36),得到

$$y = cx + f(c), \tag{3.37}$$

这里 c 是任意常数,这就是(3.36)的通解.

如果 $x + f'(p) = 0$,将它和(3.36)合起来

$$\begin{cases} x + f'(p) = 0, \\ y = xp + f(p) \end{cases} \tag{3.38}$$

消去 p 也得到方程的一个解. 注意,求得此解的过程正好与从通解(3.37)中求包络的手续一样. 可以验证,此解的确是通解的包络. 由此,我们知道,克莱罗微分方程的通解是一直线族(在原方程中以 c 代 p 即得),此直线族的包络就是方程的奇解.

例 5 求解方程 $y = xp + \frac{1}{p}$.

解 这是克莱罗微分方程,因而它的通解就是

$$y = cx + \frac{1}{c}.$$

从

$$\begin{cases} x - \frac{1}{c^2} = 0, \\ y = cx + \frac{1}{c} \end{cases}$$

中消去 c,得到奇解

$$y^2 = 4x.$$

这方程的通解是直线族,而奇解是通解的包络(见图(3.8)).

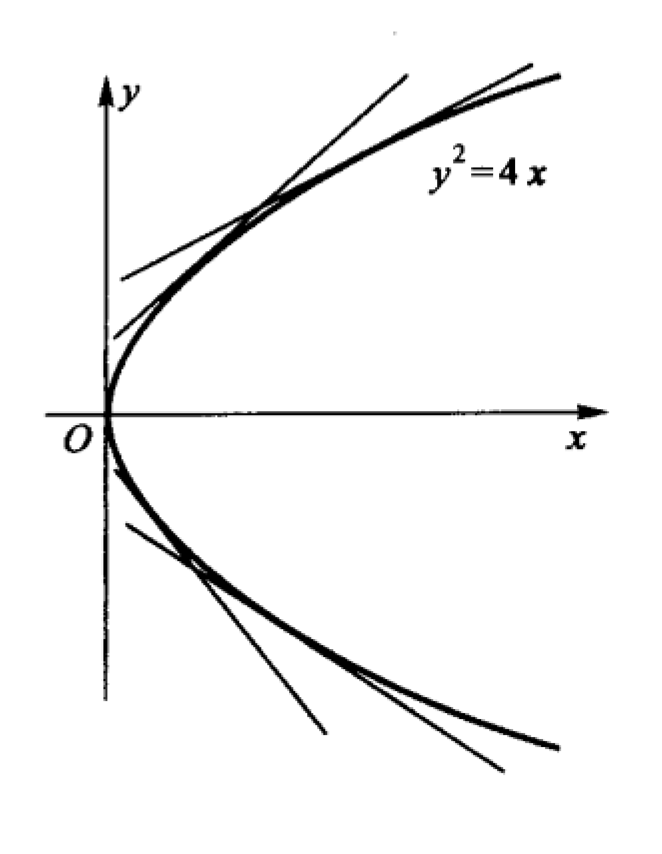
例 6 求一曲线,使在其上每一点的切线截割坐标轴而成的直角三角形(如图(3.9)中的三角形 OAB)的面积都等于 2.

解 设所要求的曲线的切线方程为

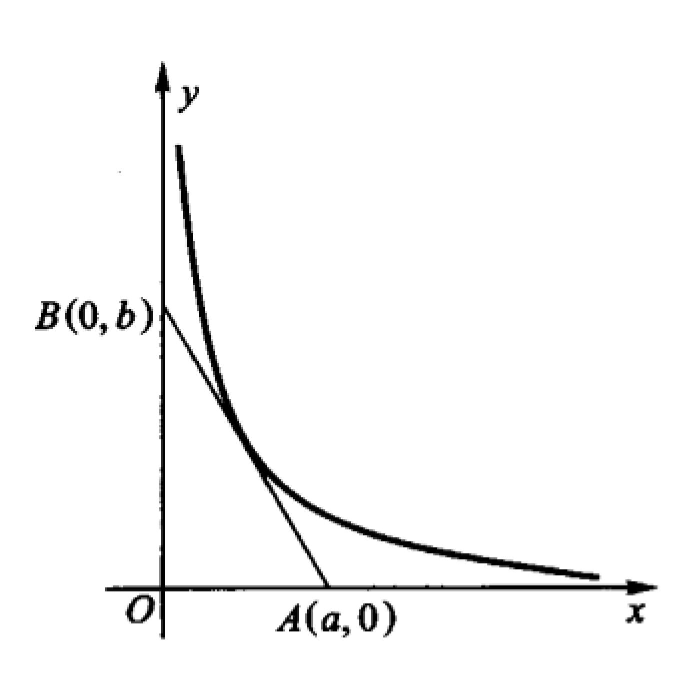
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

依题意有

$$ab = 4,$$



图(3.8)



图(3.9)

而
$$\frac{b}{a}=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

由上述三式消去 a,b 得

$$\left(y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

或

$$y=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\pm2\sqrt{-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

这是克莱罗微分方程,其通解为

$$y=c_1x\pm2\sqrt{-c_1}=2c-c^2x\quad(c_1<0),$$

这里 $c=\pm\sqrt{-c_1}$ 为任意常数.易见此直线族的每一条直线都是满足题意的解.现在求曲线族的包络,亦即微分方程的奇解.为此,从

$$\begin{cases}y=2c-c^2x,\\1-cx=0\end{cases}$$

中消去 c 得微分方程的奇解 $xy=1$,这是等腰双曲线,显然它就是

满足要求的曲线.

习题 3.4

1. 解下列方程,并求奇解(如果存在的话):

(1) $y=2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4$;

(2) $x=y-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$;

(3) $y=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$,并画出积分曲线图;

(4) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$,并画出积分曲线图;

(5) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$;

(6) $x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3-y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-1=0$;

(7) $y=x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$;

(8) $x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-(x-a)^2=0$($a$ 为常数);

(9) $y=2x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3$;

(10) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$.

2. 求下列曲线族的包络,并绘出图形:

(1) $y=cx+c^2$;

(2) $c^2y+cx^2-1=0$;

(3) $(x-c)^2+(y-c)^2=4$;

(4) $(x-c)^2+y^2=4c$.

3. 求一曲线,使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 a.

4. 试证:就克莱罗微分方程来说,p-判别曲线和方程通解的 c-判别曲线同样是方程通解的包络,从而为方程的奇解.

*§3.5 数 值 解

在实用上有重大意义的很多微分方程,即使它们能满足上述的甚至更广泛的解存在唯一性条件,但它们的解常常不能表达成初等函数的形式.对于这类微分方程的解的讨论,除了我们将在第六章中介绍的稳定性、定性方法之外,最常用的方法就是数值积分,也就是对微分方程进行数值解,这方面已形成了一门独立的学科.

这里仅简单介绍最常用且最基础的两种数值解法,要深入学习可以参考有关书籍[12].

3.5.1 欧拉方法

求微分方程的初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{3.39}$$

的解 $y=y(x)$,可以从初值条件 $y(x_0)=y_0$ 出发,按照一定的步长 h,依某种方法逐步计算微分方程解 $y(x)$ 的近似值 $y_n\approx y(x_n)$,这里 $x_n=x_0+n\cdot h$.这样求出的解称为**数值解**.由于数字计算机的发展,通过数值解及其相应的图形软件使我们方便简捷地了解微分方程的解随时间及参数变化时的形状,而不必直接求出解来,数值解方法成为分析微分方程的有力工具.

欧拉曾简单地用差分代替微分,方程(3.39)可化为

$$y_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n),\quad x_n=x_0+n\cdot h, \tag{3.40}$$

称为**欧拉(Euler)公式**.即在 Oxy 平面方程的解曲线 $y=y(x)$ 上,取过点 (x_n,y_n) 的切线(斜率为 $f(x_n,y_n)$),当 $x=x_{n+1}$ 时,在切线上截取的 $y=y_{n+1}$ 作为解的近似值.

欧拉公式相当于将解 $y(x_{n+1})=y(x_n+h)$ 用泰勒级数展开,只取一次项,其局部截断误差为 h^2 的常数倍

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\cdots=y_n+hf_n(x_n,y_n)+$$
$$O(h^2)=y_{n+1}+O(h^2),$$

因此,欧拉公式的局部截断误差可写为

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2).$$

用一种方法,其局部截断误差为步长 h 的 $O(h^{p+1})$ 时称此方法有 **p 阶精度**,因此,欧拉方法有 1 阶精度.

如果微分方程的解取积分形式

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x,$$

利用定积分的梯形公式作近似代换,可得

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(s,y(s))\mathrm{d}s\\&\approx y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{1}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))\mathrm{d}s\\&=y_n+\frac{1}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))(x_{n+1}-x_n),\end{aligned}$$

上式中含未知值 y_{n+1},但其值可用欧拉公式计算.即先用欧拉公式进行预测,再用上述的梯形公式校正,计算公式为

$$\bar{y}_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n,y_n),y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})),\tag{3.41}$$

此方法称为**改进的欧拉方法**.现计算其精度,取半步长的泰勒级数展开式

$$\begin{aligned}y\left(x_{n+\frac{1}{2}}\right)&=y\left(x_n+\frac{h}{2}\right)\\&=y(x_n)+\frac{h}{2}y'(x_n)+\frac{h^2}{8}y''(x_n)+O(h^3)\\&=y\left(x_{n+1-\frac{1}{2}}\right)=y\left(x_{n+1}-\frac{h}{2}\right)=y(x_{n+1})-\frac{h}{2}y'(x_{n+1})+\end{aligned}$$

$$\frac{h^2}{8}y''(x_{n+1})+O(h^3),$$

因 $y''(x_{n+1})=y''(x_n+h)=y''(x_n)+hy'''(\eta)$. 比较上两式再利用 $y_n=y(x_n)$可得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+(f_{n+1}+f_n)\frac{h}{2}+O(h^3)=y_{n+1}+O(h^3),$$

这里 y_{n+1}是用改进的欧拉方法计算的 $x=x_{n+1}$时的 $y=y(x)$值，因此改进的欧拉方法有 2 阶精度.

3.5.2 龙格－库塔方法

可以用间接的泰勒级数式求数值解，由中值定理

$$y_{n+1}=y_n+h\cdot f(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h))=y_n+h\cdot k^*(x_n,y_n,h), \tag{3.42}$$

这里 $k^*(x_n,y_n,h)=f(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h))$称为区间$[x_n,x_{n+1}]$的平均斜率，当 $h=0$ 时，$k^*(x,y,0)=f(x,y)$，可以通过在区间上取若干点的斜率的线性组合来确定 $k^*(x_n,y_n,h)$

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{r}\lambda_i k_i, \tag{3.43}$$

其中 λ_i为加权因子，k_i为第 i 段斜率，共有 r 段. 第 1 段取 $k_1=f_n=f(x_n,y_n)$，然后逐步递推

$$k_j=f\left(x_n+d_jh,y_n+h\sum_{s=1}^{j-1}\beta_{js}k_s\right),\quad j=2,3,\cdots,r,$$

其常数 d_j,β_{js}待定，上两式称为 r 阶(段)**龙格－库塔(Runge-Kutta)公式**.

选定 λ_i,d_j,β_{js}使 r 阶龙格－库塔公式有尽可能高的 $p(r)$阶精度. 考虑 $r=2$ 情形，应用双变量泰勒级数展式

$$\begin{aligned}k_2&=f(x_n+d_2h,y_n+\beta_{21}k_1h)\\&=f(x_n,y_n)+h\left(d_2\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{21}k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_n,y_n)\\&\quad+\cdots+\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\left(d_2\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{21}k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-1}f(x_n,y_n)+O(h^p),\end{aligned}$$

将其代入龙格－库塔公式，经整理得

$$y_{n+1}=y_n+h(\lambda_1+\lambda_2)f(x_n,y_n)+h^2\lambda_2(d_2f_x+\beta_{21}k_1f_y)(x_n,y_n)+\cdots$$
$$+\frac{\lambda_2h^{p-1}}{(p-1)!}\left(d_2\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{21}k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-1}f(x_n,y_n)+O(h^p),$$

上式与典型泰勒级数展开式对比，令 h 和 h^2 项的系数相同，可得条件

$$\lambda_1+\lambda_2=1,\quad \lambda_2\cdot d_2=\frac{1}{2},\quad \lambda_2\cdot\beta_{21}=\frac{1}{2},$$

而要 h^3 项系数相同的条件更多且无法同时满足，因此 $r=2$ 时，龙格－库塔公式最大阶数为 $p(2)=2$．取 d_2 为自由参数，则上述条件变为

$$\lambda_1=1-\frac{1}{2d_2},\quad \lambda_2=\frac{1}{2d_2},\quad \beta_{21}=d_2,$$

当 $d_2=1$ 时变为改进的欧拉方法；尚可取 $d_2=\frac{1}{2}\left(\text{或}\frac{2}{3}\right)$得到常用的 2 阶龙格－库塔公式

$$y_{n+1}=y_n+hk_2,k_1=f(x_n,y_n),k_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1\right).\tag{3.44}$$

用同样方法分析高阶龙格－库塔公式．对 $r=3$ 而言，龙格－库塔公式有 8 个系数应满足 6 个等式，有两个自由参数，其最大阶数为 $p(3)=3$，即有 3 阶精度．

可以证明，当 $r\leqslant 4$ 时 $p(r)=r$；而 $r=5,6,7$ 时，$p(r)=r-1$；$r=8,9$ 时，$p(r)=r-2$．由于 4 阶以上龙格－库塔公式的函数值 $f(x,y)$的计算工作量大大增加，而精度提高较慢．因此，最为常用的是具有 4 阶精度的 4 阶龙格－库塔公式

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
k_1 = f(x_i, y_i), \\
k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).
\end{cases}
\tag{3.45}
$$

对龙格－库塔公式(3.43),必须保证当 $h \to 0$ 时平均斜率趋近真正斜率,就是要求成立

$$
k^*(x_n, y_n, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'(x_n) = f(x_n, y_n),
$$

这个必要条件称为**相容性条件**,可以用局部截断误差的阶数表示其相容的程度.

另一方面,数值解的计算必须保证当 $h \to 0$ 时收敛于精确解,称为**收敛性问题**,即

$$
\lim_{h \to 0, x_n \to x} y_n = y(x)
$$

收敛性可以用**整体误差** $e_n = |y(x_n) - y_n|$ 表示,它包括从初值条件 $y(x_0) = y_0$ 开始由 x_0 到 x_n 每步产生的局部截断误差与舍入误差积累的总和.对某一计算方法,如存在正数 M,其整体误差 $e_n \leqslant Mh^p$,则称该方法为 **p 阶收敛**的.

虽然相容性表示的是计算公式以方程为极限,收敛性表示的是解的计算公式以方程的解为极限,两者概念不同,但只要微分方程满足一定条件,则它们是等价的.具体地说,当略而不计舍入误差时,如平均斜率函数 $k^*(x, y, h)$ 满足关于 y 的利普希茨条件,则 p 阶相容的方法一定是 p 阶收敛的,即有估计式 $e_n \leqslant Mh^p$.

舍入误差是由计算机字长、函数计算精度及定点或浮点运算等多种因素产生,分析较困难,一般当作随机变量处理.如同时考虑截断误差和舍入误差,则整体误差将变为 $e_n \leqslant Mh^p + \frac{\varepsilon}{h}$,这里 ε

为每一步舍入误差的上界.这表示缩小步长 h 会减少截断误差,但因步数增加又会加大舍入误差.计算时必须选择适合的步长,在截断误差的积累和舍入误差的积累之间取得平衡.

例 1 用欧拉方法、改进欧拉方法、2 阶龙格 - 库塔方法、4 阶龙格 - 库塔方法计算下列初值问题,并与精确解对比,步长 $h=0.1$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(1-y^2),\quad y(0)=2. \tag{3.46}$$

解 易得方程(3.46)的精确解为

$$y(x)=\sqrt{\frac{4\mathrm{e}^{2x}}{4\mathrm{e}^{2x}-3}}. \tag{3.47}$$

根据公式(3.47),(3.40),(3.41),(3.44),(3.45)计算结果如下表:

	精确解	欧拉方法		改进的欧拉方法		二阶龙格 - 库塔方法		四阶龙格 - 库塔方法	
x_i	y_i	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差	y_i	误差
0	2	2	0	2	0	2	0	2	0
0.1	1.6097	1.4	0.20966	1.6328	0.023143	1.6093	0.070307	1.5394	0.000322
0.2	1.4181	1.2656	0.1525	1.4388	2.07E-2	1.4179	0.059893	1.3582	0.000156
0.3	1.3037	1.1894	0.11422	1.32	1.64E-2	1.3036	0.047845	1.2558	8.73E-5
0.4	1.2281	1.1401	0.088016	1.2409	1.28E-2	1.2281	0.038258	1.1899	5.44E-5
0.5	1.1752	1.1059	0.069255	1.1852	1.00E-2	1.1751	0.030877	1.1443	3.63E-5
0.6	1.1366	1.0813	0.055327	1.1445	7.96E-3	1.1366	0.025148	1.1114	2.53E-5
0.7	1.1077	1.063	0.044694	1.114	6.39E-3	1.1076	0.020639	1.087	1.82E-5
0.8	1.0856	1.0492	0.036401	1.0907	5.16E-3	1.0855	0.01704	1.0685	1.34E-5
0.9	1.0684	1.0386	0.029828	1.0726	4.21E-3	1.0684	0.014134	1.0543	1.01E-5
1	1.055	1.0304	0.024552	1.0584	3.44E-3	1.055	0.011764	1.0432	7.63E-6

注:表中误差 E-2 表示 10^{-2}.

公式(3.42)实际上是单步法的通用表示式,在计算 y_{n+1} 时只用到 y_n.由于计算 y_{n+1} 之前已计算得到一系列近似值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,可用这些值来预测 y_{n+1},其一般形式为

$$y_{n+1}=a_ny_n+a_{n-1}y_{n-1}+\cdots+a_{n-p}y_{n-p}$$

$$+h(b_{n+1}y'_{n+1}+b_ny'_n+\cdots+b_{n-p}y'_{n-p})+E_n,$$

$b_{n+1}=0$ 时称为向前积分，E_n 为误差，包括局部截断误差和舍入误差.通过预测、修正、校正再迭代的方法使其误差有较高精度，这种思想称为**线性多步法**.

当应用计算机通过程序进行自动计算时，往往先确定所要求的具体精度(一般为 10^{-8} 或 10^{-6})，然后根据所在位置(x,y)及$f(x,y)$的情况确定步长 h 再进行计算，这时称为**浮动步长法**.实际计算时往往先按照上一次计算的步长进行计算，然后检查是否达到所要求的精度，如未达到则减小步长重新计算，如超出精度较多，则放宽步长进行计算.通过自动调整步长进行计算可以大大缩短计算时间，这种方法称为**自动变步长**计算法.目前设计计算机数值计算方法多采用这种方法.

前面讨论的一阶常微分方程初值问题(3.39)的数值解方法同样适用于一阶常微分方程组初值问题的数值解，只是将变量 $\boldsymbol{y}$ 和函数$\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$理解为向量即可.但对微分方程组的初值问题，由于变量 $\boldsymbol{y}$ 为向量.如果方程组的解 $\boldsymbol{y}$ 的各分量值存在数量级的差别，则其数值求解异常困难，不易准确.这种问题称为**刚性(stiff)问题**，是微分方程组数值解研究的难题.我们称微分方程组线性近似部分其特征值实部的绝对值中最大与最小之比为**刚性比**.在化学反应、电子网络、自动控制等领域常见刚性比很大的刚性问题，在实际应用时需考虑其常微分方程组是不是刚性的.一般而言，最常用的是第 4、5 阶龙格－库塔方法，稍带刚性时则用第 2,3 阶龙格－库塔方法较好.有些数学软件如 MATLAB 还专门设计有解刚性方程的数值求解函数如 ode15s,ode23s 等.

数值解得到的数值不易分析时，计算机技术的发展已提出**数据可视化**问题，将数据变为图形图像便于分析处理.实际上，微分方程数值解在图形中显示为积分曲线或轨线(见§6.3)，特别是大部分微分方程都是不可解、不可积的，通过数值解及其图形显示对微分方程的研究有很大帮助.在第六章提及 Lorenz 方程的奇异吸

引子和数学物理中的孤立子便是通过数值模拟计算发现的.

习题 3.5

1. 从例 1 的欧拉方法、改进的欧拉方法、2 阶龙格 - 库塔方法、4 阶龙格 - 库塔方法中选择一种方法每一步从精确解出发计算出下一步,并求出其相对误差,同时与表中的积累误差比较.

2. 计算线性微分方程

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.1 & -49.9 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 70 & -120 \end{bmatrix}$$

的刚性比.

3. 试用附录Ⅱ中的数学语言求解例 1.

本章学习要点

本章重点在于介绍和证明解的存在唯一性定理及解的一些基本性质.解的存在唯一性定理是微分方程理论中的基本定理,也是微分方程近似计算(包括数值计算)的前提和根据.解的延拓定理及解对初值的连续性和可微性定理揭示了微分方程解的重要性质.逐步逼近法是一个重要的分析方法,除本章运用它来证明存在唯一性定理外,今后还将继续应用,读者一定要熟悉和掌握这一证明方法.因此,理解有关定理的内容,掌握逐步逼近法,这是本章的基本要求.

关于解的存在性与唯一性问题的研究是很多的,除本章采用的皮卡逐步逼近法(压缩映像原理)之外,还有欧拉(Euler)折线法(差分法)、绍德尔(Schauder)不动点方法等几种常见的基本方法,希望深入学习和研究的读者可参阅文献[13].

另外,本章还介绍了一阶微分方程奇解的概念和求奇解的两种方法以及两种数值解法,这些内容只要求一般了解就够了.

第四章

高阶微分方程

我们在本章讨论二阶及二阶以上的微分方程，即高阶微分方程．对于高阶微分方程的基本理论（包括存在唯一性定理）和求解方法，我们分两部分来处理：对于线性微分方程部分放在第四、五章讨论；而非线性微分方程（组）放在第六章讨论．在微分方程的理论中，线性微分方程是非常值得重视的一部分内容．这不仅因为线性微分方程的一般理论已被研究得十分清楚，而且线性微分方程是研究非线性微分方程的基础，它在物理、力学和工程技术、自然科学中也有着广泛的应用．本章重点讲述线性微分方程的基本理论和常系数方程的解法，也简单介绍某些高阶微分方程的降阶方法和二阶线性方程的幂级数解法．

§4.1 线性微分方程的一般理论

4.1.1 引言

我们讨论如下的 n 阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t), \tag{4.1}$$

其中 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函

数.

如果 $f(t)\equiv 0$,则方程(4.1)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0,\quad(4.2)$$

我们称它为 n **阶齐次线性微分方程**,简称**齐次线性微分方程**,而称一般的方程(4.1)为 n **阶非齐次线性微分方程**,简称**非齐次线性微分方程**,并且通常把方程(4.2)叫做**对应于方程(4.1)的齐次线性微分方程**.

同一阶微分方程一样,高阶微分方程也存在着是否有解和解是否唯一的问题.因此,作为讨论的基础,我们首先给出方程(4.1)的解的存在唯一性定理.

定理 1 如果 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数,则对于任一 $t_0\in[a,b]$ 及任意的 $x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$,方程(4.1)存在唯一解 $x=\varphi(t)$,定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上,且满足初值条件

$$\varphi(t_0)=x_0,\frac{d\varphi(t_0)}{dt}=x_0^{(1)},\cdots,\frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)}.\quad(4.3)$$

我们将在下一章讲述线性微分方程组的有关定理时顺便给出这一定理的证明.从这个定理可以看出,初值条件唯一地确定了方程(4.1)的解,而且这个解在所有 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 连续的整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有定义.

4.1.2 齐次线性微分方程的解的性质与结构

首先讨论齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0.\quad(4.2)$$

根据"常数可以从微分号下提出来"以及"和的导数等于导数之和"的法则,容易得到齐次线性微分方程的解的叠加原理.

定理 2(叠加原理) 如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是方程

(4.2)的 k 个解,则它们的线性组合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$也是(4.2)的解,这里 $c_1,c_2,\cdots,c_k$是任意常数.

特别地,当 $k=n$ 时,即方程(4.2)有解

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t) \tag{4.4}$$

它含有 n 个任意常数.我们要问,在什么条件下,表达式(4.4)能够成为 n 阶齐次线性微分方程(4.2)的通解?又它将具有什么特性呢?为了讨论的需要,我们引进函数线性相关与线性无关及朗斯基(Wronsky)行列式等概念.

考虑定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$,如果存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$,使得恒等式

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)\equiv 0$$

对于所有 $t\in[a,b]$都成立,我们称这些函数是**线性相关**的,否则就称这些函数在所给区间上**线性无关**.

例如函数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 在任何区间上都是线性无关的;但函数 $\cos^2 t$ 和 $\sin^2 t-1$ 在任何区间上都是线性相关的.

又如函数 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 在任何区间上都是线性无关的.因为恒等式

$$c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n\equiv 0 \tag{4.5}$$

仅当所有 $c_i=0(i=0,1,2,\cdots,n)$时才成立.如果至少有一个 $c_i\neq 0$,则(4.5)的左端是一个不高于 n 次的多项式,它最多可有 n 个不同的根.因此,它在所考虑的区间上不能有多于 n 个零点,更不可能恒为零了.

由定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的k 个可微$k-1$ 次的函数 $x_1(t)$,$x_2(t),\cdots,x_k(t)$所作成的行列式

$$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)]$$
$$\equiv W(t)\equiv\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的**朗斯基行列式**.

定理 3 若函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性相关,则在$[a,b]$上它们的朗斯基行列式 $W(t)\equiv 0$.

证明 由假设即知,存在一组不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0,\quad a\leqslant t\leqslant b,\tag{4.6}$$

依次对 t 微分此恒等式,得到

$$\begin{cases}c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_nx_n'(t)=0,\\ c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_nx_n''(t)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t)=0.\end{cases}\tag{4.7}$$

把(4.6)和(4.7)看成关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的齐次线性代数方程组,它的系数行列式就是 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$,于是由线性代数理论知道,要此方程组存在非零解,则它的系数行列式必须为零,即 $W(t)\equiv 0(a\leqslant t\leqslant b)$.定理证毕.

我们指出,逆定理一般不成立.事实上,容易给出这样的函数组,由其构成的朗斯基行列式恒为零,然而它们却是线性无关的.例如函数

$$x_1(t)=\begin{cases}t^2, & -1\leqslant t<0,\\ 0, & 0\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

和

$$x_2(t)=\begin{cases}0, & -1\leqslant t<0,\\ t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

在区间 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上,显然 $W[x_1(t),x_2(t)]\equiv 0$,但它们在此区间上却是线性无关的.因为,假设存在恒等式

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\equiv 0,\ -1\leqslant t\leqslant 1,\tag{4.8}$$

则当 $-1\leqslant t<0$ 时,推得 $c_1=0$;而当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时又推得 $c_2=0$.即除 $c_1=c_2=0$ 外,找不到别的常数值 c_1 和 c_2(不全为 0)使恒等式

(4.8)对一切 $t\in[-1,1]$成立,故 $x_1(t),x_2(t)$是线性无关的.

但是,如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是齐次线性微分方程(4.2)的解,那么我们就有下面的定理.

定理 4 如果方程(4.2)的解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关,则 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$在这个区间的任何点上都不等于零,即 $W(t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$.

证明 采用反证法.设有某个 $t_0(a\leqslant t_0\leqslant b)$使得 $W(t_0)=0$.考虑关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$的齐次线性代数方程组

$$\begin{cases}c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)+\cdots+c_nx_n(t_0)=0,\\ c_1x_1'(t_0)+c_2x_2'(t_0)+\cdots+c_nx_n'(t_0)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0)+c_2x_2^{(n-1)}(t_0)+\cdots+c_nx_n^{(n-1)}(t_0)=0,\end{cases}\tag{4.9}$$

其系数行列式 $W(t_0)=0$,故(4.9)有非零解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$.现以这组常数构造函数

$$x(t)\equiv c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t),a\leqslant t\leqslant b,$$

根据叠加原理,$x(t)$是方程(4.2)的解.注意到(4.9),知道这个解 $x(t)$满足初值条件

$$x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0,\tag{4.10}$$

但是 $x=0$ 显然也是方程(4.2)的满足初始条件(4.10)的解.由解的唯一性,即知 $x(t)\equiv 0(a\leqslant t\leqslant b)$,即

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)\equiv 0,a\leqslant t\leqslant b.$$

因为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$不全为 0,这就与 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$线性无关的假设矛盾.定理得证.

根据定理 3 和定理 4 可以知道,由 n 阶齐次线性微分方程(4.2)的 n 个解构成的朗斯基行列式或者恒等于零,或者在方程的系数为连续的区间内处处不等于零.

根据定理 1,方程(4.2)的满足初值条件

$$\begin{cases} x_1(t_0)=1, x_1'(t_0)=0, \cdots, x_1^{(n-1)}(t_0)=0, \\ x_2(t_0)=0, x_2'(t_0)=1, \cdots, x_2^{(n-1)}(t_0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t_0)=0, x_n'(t_0)=0, \cdots, x_n^{(n-1)}(t_0)=1 \end{cases}$$

的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$一定存在,又因为

$$W[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] \neq 0$$

于是根据上述定理 3,这 n 个解一定是线性无关的.由此,即得下面的定理 5.

定理 5 n 阶齐次线性微分方程(4.2)一定存在 n 个线性无关的解.

定理 6(通解结构定理) 如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程(4.2)的 n 个线性无关的解,则方程(4.2)的通解可表为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t), \tag{4.11}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$是任意常数.且通解(4.11)包括了方程(4.2)的所有解.

证明 首先,由叠加原理知道(4.11)是(4.2)的解,它包含有 n 个任意常数.我们指出,这些常数是彼此独立的.事实上

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} = W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

因而,(4.11)为方程(4.2)的通解;现在,我们证明它包括了方程的所有解.由定理 1 知道,方程的解唯一地决定于初值条件,因此,只需证明:任给一初值条件

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0', \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \tag{4.12}$$

能够确定(4.11)中的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的值,使(4.11)满足(4.12).

现令(4.11)满足条件(4.12),我们得到如下关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) = x_0, \\ c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) + \cdots + c_n x_n'(t_0) = x_0', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n x_n^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{4.13}$$

它的系数行列式就是 $W(t_0)$,由定理 4 知,$W(t_0) \neq 0$.根据线性代数方程组的理论,方程(4.13)有唯一解 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$.因此,只要表达式(4.11)中常数取为 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$,则它就满足条件(4.12).定理证完.

定理圆满地回答了上面提出的问题.

推论 方程(4.2)的线性无关解的最大个数等于 n.因此可得结论:n 阶齐次线性微分方程的所有解构成一个 n 维线性空间.

方程(4.2)的一组 n 个线性无关解称为方程的一个**基本解组**.显然,基本解组不是唯一的.特别地,当 $W(t_0)=1$ 时称其为**标准基本解组**.

4.1.3 非齐次线性微分方程与常数变易法

知道了齐次线性微分方程通解的结构,以此为基础就不难解决非齐次线性微分方程通解的结构问题了.

考虑 n 阶非齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t), \tag{4.1}$$

易见方程(4.2)是它的特殊情形,我们指出两者之间解的性质和结

构有着十分密切的联系.首先容易直接验证如下两个简单性质:

性质 1 如果 $\bar{x}(t)$是方程(4.1)的解,而 $x(t)$是方程(4.2)的解,则 $\bar{x}(t)+x(t)$也是方程(4.1)的解.

性质 2 方程(4.1)的任意两个解之差必为方程(4.2)的解.

其次,我们有下面的定理:

定理 7 设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$为方程(4.2)的基本解组,而 $\bar{x}(t)$是方程(4.1)的某一解,则方程(4.1)的通解可表为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t), \tag{4.14}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.而且这个通解(4.14)包括了方程(4.1)的所有解.

证明 根据性质 1 易知(4.14)是方程(4.1)的解,它包含有 n 个任意常数,像定理 6 的证明过程一样,不难证明这些常数是彼此独立的,因此,它是方程(4.1)的通解.现设 $\tilde{x}(t)$是方程(4.1)的任一解,则由性质 2,$\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)$是方程(4.2)的解,根据定理 6,必有一组确定的常数 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$,使得

$$\tilde{x}(t)-\bar{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t),$$

即

$$\tilde{x}(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)+\bar{x}(t),$$

这就是说,方程(4.1)的任一解 $\tilde{x}(t)$可以由(4.14)表出,其中 c_1, $c_2,\cdots,c_n$ 为相应的确定常数.由于 $\tilde{x}(t)$的任意性,这就证明了通解表达式(4.14)包括方程(4.1)的所有解.定理证完.

定理告诉我们,要解非齐次线性微分方程,只需知道它的一个解和对应的齐次线性微分方程的基本解组.我们进一步指出,只要知道对应的齐次线性微分方程的基本解组就可以利用常数变易法求得非齐次线性微分方程的解.正如我们在第二章§2.2 里所做过的那样,不过这里稍微复杂一些而已.

设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是方程(4.2)的基本解组,因而

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t) \tag{4.15}$$

为(4.2)的通解.把其中的任意常数 c_i 看作 t 的待定函数 $c_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,这时(4.15)变为

$$x=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t). \quad (4.16)$$

将它代入方程(4.1),就得到 $c_1(t),c_2(t),\cdots,c_n(t)$必须满足的一个方程,但待定函数有 n 个,即 $c_1(t),c_2(t),\cdots,c_n(t)$,为了确定它们,必须再找出 $n-1$ 个限制条件,在理论上,这些另加的条件可以任意给出,其法无穷,当然以运算上简便为宜,为此,我们将按下面的方法来给出这 $n-1$ 个条件.

对 t 微分等式(4.16)得

$$\begin{aligned}x'=&c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t)\\&+x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t),\end{aligned}$$

令

$$x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)+\cdots+x_n(t)c_n'(t)=0, \quad (4.17)_1$$

得到

$$x'=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t). \quad (4.18)_1$$

对 t 微分$(4.18)_1$,并像上面一样做法,令含有函数 $c_i'(t)$的部分等于零,我们又得到一个条件

$$x_1'(t)c_1'(t)+x_2'(t)c_2'(t)+\cdots+x_n'(t)c_n'(t)=0 \quad (4.17)_2$$

和表达式

$$x''=c_1(t)x_1''(t)+c_2(t)x_2''(t)+\cdots+c_n(t)x_n''(t). \quad (4.18)_2$$

继续上面做法,在最后一次我们得到第 $n-1$ 个条件

$$x_1^{(n-2)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-2)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-2)}(t)c_n'(t)=0 \quad (4.17)_{n-1}$$

和表达式

$$x^{(n-1)}=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t).\tag{4.18}_{n-1}$$

最后,对 t 微分$(4.18)_{n-1}$得到

$$x^{(n)}=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)$$
$$+x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t).\tag{4.18}_n$$

现将(4.16),$(4.18)_1$,$(4.18)_2$,…,$(4.18)_n$ 代入(4.1),并注意到 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是(4.2)的解,得到

$$x_1^{(n-1)}(t)c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)=f(t)\tag{4.17}_n$$

这样,我们得到了含 n 个未知函数 $c_i'(t)(i=1,2,\cdots,n)$的 n 个方程$(4.17)_1$,$(4.17)_2$,…,$(4.17)_n$,它们组成一个线性代数方程组,其系数行列式就是 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$,它不等于零,因而方程组的解可唯一确定,设求得

$$c_i'(t)=\varphi_i(t),i=1,2,\cdots,n,$$

积分得

$$c_i(t)=\int\varphi_i(t)\mathrm{d}t+\gamma_i\quad i=1,2,\cdots,n,$$

这里 γ_i 是任意常数.将所得 $c_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$的表达式代入(4.16)即得方程(4.1)的解①

$$x=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)\mathrm{d}t.$$

显然,它并且是方程(4.1)的通解.为了得到方程的一个解,只需给常数 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$以确定的值.例如,当取 $\gamma_i=0(i=1,2,\cdots,n)$时,即得解 $x=\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)\mathrm{d}t$.

① 也可把 $\varphi_i(t)$的表达式具体写出,而将解表为第五章(5.30)式的形式.

从这里可以看到，如果已知对应的齐次线性微分方程的基本解组，那么非齐次线性微分方程的任一解可由求积得到. 因此，对于线性微分方程来说，关键是求出齐次线性微分方程的基本解组.

例 1 求方程 $x''+x=\dfrac{1}{\cos t}$ 的通解，已知它的对应齐次线性微分方程的基本解组为 $\cos t, \sin t$.

解 应用常数变易法，令

$$x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t,$$

将它代入方程，则可得决定 $c_1'(t)$ 和 $c_2'(t)$ 的两个方程

$$\cos t\, c_1'(t)+\sin t\, c_2'(t)=0$$

及

$$-\sin t\, c_1'(t)+\cos t\, c_2'(t)=\frac{1}{\cos t},$$

解得

$$c_1'(t)=-\frac{\sin t}{\cos t},\quad c_2'(t)=1,$$

由此

$$c_1(t)=\ln|\cos t|+\gamma_1,\quad c_2(t)=t+\gamma_2.$$

于是原方程的通解为

$$x=\gamma_1\cos t+\gamma_2\sin t+\cos t\ln|\cos t|+t\sin t,$$

其中 γ_1,γ_2 为任意常数.

例 2 求方程 $tx''-x'=t^2$ 于域 $t\neq 0$ 上的所有解.

解 对应的齐次线性微分方程为

$$tx''-x'=0,$$

容易直接积分求得它的基本解组. 事实上，将方程改写成

$$\frac{x''}{x'}=\frac{1}{t},$$

积分即得 $x'=At$. 所以 $x=\dfrac{1}{2}At^2+B$，这里 A,B 为任意常数. 易见有基本解组 $1,t^2$. 为应用上面的结论，我们将方程改写为

$$x'' - \frac{1}{t}x' = t,$$

并以 $x = c_1(t) + c_2(t)t^2$代入,可得决定 $c_1'(t)$和 $c_2'(t)$的两个方程

$$c_1'(t) + t^2 c_2'(t) = 0 \text{ 及 } 2tc_2'(t) = t,$$

于是

$$c_2(t) = \frac{1}{2}t + \gamma_2, c_1(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \gamma_1.$$

故得原方程的通解为

$$x = \gamma_1 + \gamma_2 t^2 + \frac{1}{3}t^3,$$

这里 γ_1, γ_2是任意常数.根据定理 7,它包括了方程的所有解.

习题 4.1

1. 设 $x(t)$和 $y(t)$是区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续函数,证明:如果在区间 $a \leqslant t \leqslant b$上有$\frac{x(t)}{y(t)} \neq$常数或$\frac{y(t)}{x(t)} \neq$常数,则 $x(t)$和 $y(t)$在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上线性无关.(提示:用反证法.)

2. 证明非齐次线性微分方程的叠加原理:设 $x_1(t), x_2(t)$分别是非齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t),$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_2(t)$$

的解,则 $x_1(t) + x_2(t)$是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t) + f_2(t)$$

的解.

3. 已知齐次线性微分方程的基本解组 x_1, x_2,求下列方程对应的非齐次线性微分方程的通解:

(1) $x'' - x = \cos t, x_1 = e^t, x_2 = e^{-t}$;

(2) $x''+\frac{t}{1-t}x'-\frac{1}{1-t}x=t-1, x_1=t, x_2=e^t$;

(3) $x''+4x=t\sin t, x_1=\cos 2t, x_2=\sin 2t$;

(4) $t^2x''-4tx'+6x=36\frac{\ln t}{t}, x_1=t^2, x_2=t^3$;

(5) $t^2x''-tx'+x=6t+34t^2, x_1=t, x_2=t\ln t$;

(6) $t^2x''-3tx'-8x=18t^2\sin(\ln t), x_1=t^2\cos(2\ln t), x_2=t^2\sin(2\ln t)$.

4. 已知方程$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$有基本解组 e^t, e^{-t},试求此方程适合初值条件

$$x(0)=1,\quad x'(0)=0$$

及

$$x(0)=0,\quad x'(0)=1$$

的基本解组(称为标准基本解组,即有 $W(0)=1$),并由此求出方程的适合初值条件

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0'$$

的解.

5. 设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$是齐次线性微分方程(4.2)的任意 n 个解,它们所构成的朗斯基行列式记为 $W(t)$. 试证明 $W(t)$满足一阶线性微分方程

$$W'+a_1(t)W=0,$$

因而有

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}t_0,\quad t\in(a,b).$$

6. 假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$$

的解,这里 $a_1(t)$和 $a_2(t)$于区间$[a,b]$上连续,试证:

(1) $x_2(t)$为方程的解的充要条件是

$$W'[x_1,x_2]+a_1W[x_1,x_2]=0;$$

(2) 方程的通解可表为

$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right)dt+c_2\right],$$

其中 c_1, c_2为任意常数,$t_0, t\in[a,b]$.

7. 试证 n 阶非齐次线性微分方程(4.1)存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

§ 4.2 常系数线性微分方程的解法

关于线性微分方程的通解的结构问题,从理论上说,可以认为在§4.1中已经解决了,但是求方程通解的方法还没有具体给出.事实上,对于一般的线性微分方程是没有普遍的解法的.本节介绍求解问题能够彻底解决的一类方程——常系数线性微分方程及可以化为这一类型的方程.我们将看到,为了求得常系数齐次线性微分方程的通解,只须解一个代数方程而不必通过积分运算.对于某些特殊的非齐次线性微分方程也可以通过代数运算和微分运算求得它的通解.我们一定要记住常系数线性微分方程固有的这种简单特性.这一节的内容完全可以和线性振动理论(质点振动理论、电磁振荡理论等)结合起来学习.在4.2.4中我们特别以数学摆的微小振动为例,结合讲述质点振动理论,以便给读者一个直观的印象.从这里我们可以清晰地看出,物理问题提供微分方程以很直观的实际背景,而微分方程为更深刻地理解物理现象提供有力的工具,这是我们学习这一节要注意的问题.

讨论常系数线性微分方程的解法时,需要涉及实变量的复值函数及复指数函数的问题,我们在4.2.1中预先给以介绍.

4.2.1 复值函数与复值解

如果对于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 中的每一实数 t,有复数 $z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 与它对应,其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上定义的实函数,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位,我们就说在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上给定了一个**复值函数** $z(t)$.如果实函数 $\varphi(t)$,$\psi(t)$ 当 t 趋于 t_0 时有极限,我们就称复值函数 $z(t)$ 当 t 趋于 t_0 时有极限,并且定义

$$\lim_{t\to t_0} z(t)=\lim_{t\to t_0}\varphi(t)+\mathrm{i}\lim_{t\to t_0}\psi(t).$$

如果 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=z(t_0)$,我们就称 $z(t)$ **在 t_0 连续**.显然,$z(t)$ 在 t_0

连续相当于 $\varphi(t),\psi(t)$在 t_0连续. 当 $z(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上每点都连续时,就称 $z(t)$ **在区间** $\boldsymbol{a\leqslant t\leqslant b}$ **上连续**. 如果极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$存在,就称 $z(t)$**在** $\boldsymbol{t_0}$ **有导数(可微)**. 且记此极限为$\dfrac{\mathrm{d}z(t_0)}{\mathrm{d}t}$或者 $z'(t_0)$. 显然 $z(t)$在 t_0处有导数相当于 $\varphi(t)$, $\psi(t)$在 t_0处有导数,且

$$\frac{\mathrm{d}z(t_0)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\psi(t_0)}{\mathrm{d}t}.$$

如果 $z(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上每点都有导数,就称 $z(t)$**在区间** $\boldsymbol{a\leqslant t\leqslant b}$**上有导数**. 对于高阶导数可以类似地定义.

设 $z_1(t),z_2(t)$是定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的可微函数,c 是复值常数,容易验证下列等式成立:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_1(t)+z_2(t)]=\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[cz_1(t)]=c\,\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_1(t)\cdot z_2(t)]=\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdot z_2(t)+z_1(t)\cdot\frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t}.$$

在讨论常系数线性微分方程时,函数 e^{Kt}将起着重要的作用,这里 K 是复值常数. 我们现在给出它的定义,并且讨论它的简单性质.

设 $K=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是任一复数,这里 α,β 是实数,而 t 为实变量,我们定义

$$\mathrm{e}^{Kt}=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}=\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t).$$

由上述定义立即推得

$$\cos\beta t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}),$$

$$\sin\beta t=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}).$$

如果以 $\overline{K}=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 表示复数 $K=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 的共轭复数.那么容易证明

$$\mathrm{e}^{\overline{K}t}=\overline{\mathrm{e}^{Kt}}.$$

此外,函数 e^{Kt} 还有下面重要性质:

(1) $\mathrm{e}^{(K_1+K_2)t}=\mathrm{e}^{K_1t}\cdot\mathrm{e}^{K_2t}$;

事实上,记 $K_1=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$, $K_2=\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2$,那么由定义得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(K_1+K_2)t}&=\mathrm{e}^{(\alpha_1+\alpha_2)t+\mathrm{i}(\beta_1+\beta_2)t}\\&=\mathrm{e}^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[\cos(\beta_1+\beta_2)t+\mathrm{i}\sin(\beta_1+\beta_2)t]\\&=\mathrm{e}^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[\cos\beta_1t\cdot\cos\beta_2t-\sin\beta_1t\cdot\sin\beta_2t\\&\quad+\mathrm{i}(\sin\beta_1t\cdot\cos\beta_2t+\cos\beta_1t\cdot\sin\beta_2t)]\\&=\mathrm{e}^{\alpha_1t}(\cos\beta_1t+\mathrm{i}\sin\beta_1t)\cdot\mathrm{e}^{\alpha_2t}(\cos\beta_2t+\mathrm{i}\sin\beta_2t)\\&=\mathrm{e}^{K_1t}\cdot\mathrm{e}^{K_2t}.\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{Kt}}{\mathrm{d}t}=K\mathrm{e}^{Kt}$,其中 t 为实变量;

事实上,设 $K=\alpha+\mathrm{i}\beta$,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{Kt}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t})\\&=\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\alpha t}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}+\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}}{\mathrm{d}t}\\&=\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}+\mathrm{e}^{\alpha t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\\&=\alpha\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}+\mathrm{e}^{\alpha t}(-\beta\sin\beta t+\mathrm{i}\beta\cos\beta t)\\&=\alpha\mathrm{e}^{Kt}+\mathrm{i}\beta\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}=(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{e}^{Kt}=K\mathrm{e}^{Kt}.\end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[K\mathrm{e}^{Kt}]=K\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{Kt}}{\mathrm{d}t}$,由(2)容易推得

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\mathrm{e}^{Kt})=K^n\mathrm{e}^{Kt}$.

综上所述,可以得出一个简单的结论,就是实变量的复值函数的求导公式与实变量的实值函数的求导公式完全类似,而复指数函数具有与实指数函数完全类似的性质.这可以帮助我们记忆上

面的结果.

现在我们引进线性微分方程的复值解的定义.定义于区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的实变量复值函数 $x=z(t)$称为方程(4.1)的**复值解**,如果

$$\frac{\mathrm{d}^n z(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}z(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}+a_n(t)z(t)=f(t)$$

对于 $a\leqslant t\leqslant b$ 恒成立.

最后,我们给出在今后讨论中要用到的两个简单结论.

定理 8 如果方程(4.2)中所有系数 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$都是实值函数,而 $x=z(t)=\varphi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$是方程的复值解,则$z(t)$的实部 $\varphi(t)$、虚部 $\psi(t)$和共轭复值函数 $\bar{z}(t)$也都是方程(4.2)的解.

定理 9 若方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t)+\mathrm{i}v(t)$$

有复值解 $x=U(t)+\mathrm{i}V(t)$,这里 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$及 $u(t)$,$v(t)$都是实函数,那么这个解的实部 $U(t)$和虚部 $V(t)$分别是方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=v(t)$$

的解.

定理 8 和定理 9 的证明留给读者作为练习.

4.2.2 常系数齐次线性微分方程和欧拉方程

设齐次线性微分方程中所有系数都是常数,即方程有如下形状

$$L[x] \equiv \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = 0, \quad (4.19)$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数.我们称(4.19)为 n 阶常系数齐次线性微分方程.正如前面所指出的,它的求解问题可以归结为代数方程求根问题,现在就来具体讨论方程(4.19)的解法.按照§4.1 的一般理论,为了求方程(4.19)的通解,只需求出它的基本解组.下面介绍求(4.19)的基本解组的**欧拉**(Euler)**待定指数函数法(又称为特征根法)**.

回顾一阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = 0,$$

我们知道它有形如 $x = \mathrm{e}^{-at}$ 的解,且它的通解就是 $x = c\mathrm{e}^{-at}$.这启示我们对于方程(4.19)也去试求指数函数形式的解

$$x = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad (4.20)$$

其中 λ 是待定常数,可以是实的,也可以是复的.

注意到

$$L[\mathrm{e}^{\lambda t}] \equiv \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{\lambda t}}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda t}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda t}}{\mathrm{d}t} + a_n \mathrm{e}^{\lambda t}$$
$$= (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)\mathrm{e}^{\lambda t} \equiv F(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t},$$

其中 $F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ 是 λ 的 n 次多项式.易知,(4.20)为方程(4.19)的解的充要条件是 λ 是代数方程

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (4.21)$$

的根.因此,方程(4.21)将起着预示方程(4.19)的解的特性的作用,我们称它为方程(4.19)的**特征方程**,它的根就称为**特征根**.下面根据特征根的不同情况分别进行讨论.

(1) 特征根是单根的情形

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征方程(4.21)的 n 个彼此不相等的根,则相应地方程(4.19)有如下 n 个解:

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}. \quad (4.22)$$

我们指出这 n 个解在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上线性无关,从而组成方程的基本解组.事实上,这时

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

$$=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

而最后一个行列式是著名的范德蒙德(Vandermonde)行列式,它等于 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)$.由于假设 $\lambda_i\neq\lambda_j$(当 $i\neq j$),故此行列式不等于零,从而 $W(t)\neq0$,于是解组(4.22)线性无关,这就是所要证明的.

如果 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数,则(4.22)是方程(4.19)的 n 个线性无关的实值解,而方程(4.19)的通解可表示为

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.

如果特征方程有复根,则因方程的系数是实常数,复根将成对共轭地出现.设 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 是一特征根,则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也是特征根,因而与这对共轭复根对应的,方程(4.19)有两个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),$$
$$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t).$$

根据定理 8,它们的实部和虚部也是方程的解.这样一来,对应于特征方程的一对共轭复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$,我们可求得方程(4.19)的两个实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\qquad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

(2) 特征根有重根的情形

设特征方程有 k 重根 $\lambda=\lambda_1$,则如所周知

$$F(\lambda_1)=F'(\lambda_1)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda_1)=0,\quad F^{(k)}(\lambda_1)\neq 0.$$

先设 $\lambda_1=0$,即特征方程有因子 λ^k,于是

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0,$$

也就是特征方程的形状为

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k}\lambda^k=0.$$

而对应的方程(4.19)变为

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}=0,$$

易见它有 k 个解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k-1}$,而且它们是线性无关的(见4.1.2).这样一来,特征方程的 k 重零根就对应于方程(4.19)的 k 个线性无关解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k-1}$.

如果这个 k 重根 $\lambda_1\neq 0$,我们作变量变换 $x=y\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$,注意到

$$\begin{aligned}x^{(m)}&=(y\mathrm{e}^{\lambda_1 t})^{(m)}\\&=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\left[y^{(m)}+m\lambda_1 y^{(m-1)}+\frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}+\cdots+\lambda_1^m y\right],\end{aligned}$$

可得

$$L[y\mathrm{e}^{\lambda_1 t}]=\left(\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_n y\right)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=L_1[y]\mathrm{e}^{\lambda_1 t}.$$

于是方程(4.19)化为

$$L_1[y]\equiv\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+b_n y=0,\quad (4.23)$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 仍为常数,而相应的特征方程为

$$G(\mu)\equiv\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\mu+b_n=0.\quad (4.24)$$

直接计算易得

$$\begin{aligned}F(\mu+\lambda_1)\mathrm{e}^{(\mu+\lambda_1)t}&=L[\mathrm{e}^{(\mu+\lambda_1)t}]=L_1[\mathrm{e}^{\mu t}]\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\&=G(\mu)\mathrm{e}^{(\mu+\lambda_1)t},\end{aligned}$$

因此

$$F(\mu+\lambda_1)=G(\mu),$$

从而

$$F^{(j)}(\mu+\lambda_1)=G^{(j)}(\mu),\quad j=1,2,\cdots,k.$$

可见(4.21)的根 $\lambda=\lambda_1$ 对应于(4.24)的根 $\mu=\mu_1=0$,而且重数相同.这样,问题就化为前面已经讨论过的情形了.

我们知道,方程(4.24)的 k_1 重根 $\mu_1=0$ 对应于方程(4.23)的 k_1 个解 $y=1,t,t^2,\cdots,t^{k_1-1}$,因而对应于特征方程(4.21)的 k_1 重根 λ_1,方程(4.19)有 k_1 个解

$$e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t},t^2e^{\lambda_1 t},\cdots,t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}. \tag{4.25}$$

同样,假设特征方程(4.21)的其他根 $\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m$ 的重数依次为 $k_2,k_3,\cdots,k_m$;$k_i\geqslant 1$(单根 λ_j 相当于 $k_j=1$),而且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$,$\lambda_j\neq\lambda_i$(当 $i\neq j$),则方程(4.19)对应地有解

$$\begin{cases}e^{\lambda_2 t},te^{\lambda_2 t},t^2e^{\lambda_2 t},\cdots,t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ e^{\lambda_m t},te^{\lambda_m t},t^2e^{\lambda_m t},\cdots,t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}.\end{cases} \tag{4.26}$$

下面我们证明(4.25)和(4.26)全体 n 个解构成方程(4.19)的基本解组.

假若这些函数线性相关,则有

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{m}(A_0^{(r)}+A_1^{(r)}t+\cdots+A_{k_r-1}^{(r)}t^{k_r-1})e^{\lambda_r t}\\ =&\sum_{r=1}^{m}P_r(t)e^{\lambda_r t}=0,\end{aligned} \tag{4.27}$$

其中 $A_j^{(r)}$ 是常数,不全为零.不失一般性,假定多项式 $P_m(t)$ 至少有一个系数不等于零,即 $P_m(t)\not\equiv 0$.将恒等式(4.27)除以 $e^{\lambda_1 t}$,然后对 t 微分 k_1 次,我们得到

$$\sum_{r=2}^{m}Q_r(t)e^{(\lambda_r-\lambda_1)t}=0, \tag{4.28}$$

其中 $Q_r(t)=(\lambda_r-\lambda_1)^{k_1}P_r(t)+S_r(t)$,$S_r(t)$ 为次数低于 $P_r(t)$

的次数的多项式.因此，$Q_r(t)$与$P_r(t)$次数相同，且$Q_m(t)\neq 0$. 等式(4.28)与(4.27)类似，但项数减少了.如果对(4.28)施行同上的手续(这时是除以$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$而微分$k_2$次)，我们将得到项数更少的类似于(4.27)的恒等式，如此继续下去，经过$m-1$次后，我们就将得到等式

$$R_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t}=0,$$

这是不可能的，因为$R_m(t)$与$P_m(t)$有相同的次数，且$R_m(t)\neq 0$.事实上，不难直接算得

$$R_m(t)=(\lambda_m-\lambda_1)^{k_1}(\lambda_m-\lambda_2)^{k_2}\cdots$$
$$(\lambda_m-\lambda_{m-1})^{k_{m-1}}P_m(t)+W_m(t),$$

其中$W_m(t)$是次数低于$P_m(t)$的次数的多项式.

这就证明了(4.25)和(4.26)全部n个解线性无关，从而构成方程(4.19)的基本解组.

对于特征方程有复重根的情况，譬如假设$\lambda=\alpha+i\beta$是k重特征根，则$\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$也是$k$重特征根，仿(1)一样处理，我们将得到方程(4.19)的$2k$个实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^2e^{\alpha t}\cos\beta t,\cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ t^2e^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

例 1 求方程$\dfrac{d^4x}{dt^4}-x=0$的通解.

解 特征方程$\lambda^4-1=0$的根为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=i,\lambda_4=-i$.有两个实根和两个复根，均是单根，故方程的通解为

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t,$$

这里c_1,c_2,c_3,c_4是任意常数.

例 2 求解方程$\dfrac{d^3x}{dt^3}+x=0$.

解 特征方程$\lambda^3+1=0$有根$\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此，通解为

$$x = c_1 e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right),$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

例 3 求方程 $\frac{d^3 x}{dt^3} - 3\frac{d^2 x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - x = 0$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$,或 $(\lambda - 1)^3 = 0$,即 $\lambda = 1$ 是三重根,因此方程的通解具有形状

$$x = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^t,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

例 4 求解方程 $\frac{d^4 x}{dt^4} + 2\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$.

解 特征方程为 $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$,或 $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$,即特征根 $\lambda = \pm i$ 是重根.因此,方程有四个实值解

$$\cos t, t\cos t, \sin t, t\sin t,$$

故通解为

$$x = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t,$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数.

形状为

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (4.29)$$

的方程称为**欧拉方程**,这里 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数.此方程可以通过变量变换化为常系数齐次线性微分方程,因而求解问题也就可以解决.

事实上,引进自变量的变换[①]

$$x = e^t, t = \ln x,$$

直接计算得到

① 如果 $x < 0$,则用 $x = -e^t$ 所得结果一样,今后为确定起见,认定 $x > 0$,但最后结果应以 $t = \ln|x|$ 代回.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

用数学归纳法不难证明：对一切自然数 k 均有关系式

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}$ 都是常数. 于是

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}.$$

将上述关系式代入方程(4.29)，就得到常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0,\tag{4.30}$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数，因而可用上述讨论的方法求出(4.30)的通解，再代回原来的变量(注意：$t=\ln|x|$)就可求得方程(4.29)的通解.

由上述推演过程，我们知道方程(4.30)有形如 $y=e^{\lambda t}$ 的解，从而方程(4.29)有形如 $y=x^\lambda$ 的解，因此可以直接求欧拉方程的形如 $y=x^K$ 的解. 以 $y=x^K$ 代入(4.29)并约去因子 x^K，就得到确定 K 的代数方程

$$K(K-1)\cdots(K-n+1)+a_1K(K-1)\cdots(K-n+2)$$
$$+\cdots+a_n=0,\tag{4.31}$$

可以证明这正是(4.30)的特征方程. 因此，方程(4.31)的 m 重实根 $K=K_0$，对应于方程(4.29)的 m 个解

$$x^{K_0},x^{K_0}\ln|x|,x^{K_0}\ln^2|x|,\cdots,x^{K_0}\ln^{m-1}|x|,$$

而方程(4.31)的 m 重复根 $K=\alpha+i\beta$，对应于方程(4.29)的 $2m$ 个实值解

$$x^\alpha\cos(\beta\ln|x|),x^\alpha\ln|x|\cos(\beta\ln|x|),\cdots,x^\alpha\ln^{m-1}|x|\cos(\beta\ln|x|),$$

$x^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln|x|\sin(\beta\ln|x|), \cdots, x^{\alpha}\ln^{m-1}|x|\sin(\beta\ln|x|).$

例 5 求解方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0.$

解 寻找方程的形式解 $y=x^K$,得到确定 K 的方程 $K(K-1)-K+1=0$,或 $(K-1)^2=0, K_1=K_2=1$.因此,方程的通解为

$$y=(c_1+c_2\ln|x|)x,$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

例 6 求解方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+5y=0.$

解 设 $y=x^K$,得到 K 应满足的方程

$$K(K-1)+3K+5=0 \quad 或 \quad K^2+2K+5=0,$$

因此,$K_{1,2}=-1\pm 2i$,而方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}[c_1\cos(2\ln|x|)+c_2\sin(2\ln|x|)],$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

4.2.3 非齐次线性微分方程·比较系数法与拉普拉斯变换法

现在讨论常系数非齐次线性微分方程

$$L[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \tag{4.32}$$

的求解问题,这里 $a_1, a_2\cdots, a_n$ 是常数,而 $f(t)$ 为连续函数.

本来,有了前面讨论的结果,这一问题已经可以解决了,因为可以按照 4.2.2 的方法求出对应的齐次线性微分方程(4.19)的基本解组,再应用§4.1 所述的常数变易法,求得方程(4.32)的一个特解.这样,根据定理 7 即可写出方程(4.32)的通解表达式,再利用初值条件确定通解中的任意常数,就可得到方程的满足初值条件的解.但是,正如大家所看到的,通过上述步骤求解往往是比较繁琐的,而且必须经过积分运算.下面介绍当 $f(t)$ 具有某些特殊形状时所适用的一些方法——**比较系数法**和**拉普拉斯变换法**.它

们的特点是不需通过积分而用代数方法即可求得非齐次线性微分方程的特解,即将求解微分方程的问题转化为某一个代数问题来处理,因而比较简便.

(1) 比较系数法

类型 I

设 $f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$,其中 λ 及 b_i $(i=0,1,\cdots,m)$ 为实常数,那么方程(4.32)有形如

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t} \qquad (4.33)$$

的特解,其中 k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 λ 的重数(单根相当于 $k=1$;当 λ 不是特征根时,取 $k=0$),而 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 是待定常数,可以通过比较系数来确定.

① 如果 $\lambda=0$,则此时

$$f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_m.$$

现在再分两种情形讨论.

(a) 在 $\lambda=0$ 不是特征根的情形,即 $F(0)\neq0$,因而 $a_n\neq0$,这时取 $k=0$,以 $\tilde{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m$ 代入方程(4.32),并比较 t 的同次幂的系数,得到常数 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 必须满足的方程

$$\begin{cases}B_0a_n=b_0,\\ B_1a_n+mB_0a_{n-1}=b_1,\\ B_2a_n+(m-1)B_1a_{n-1}+m(m-1)B_0a_{n-2}=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_ma_n+\cdots=b_m,\end{cases} \qquad (4.34)$$

注意到 $a_n\neq0$,这些待定常数 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 可以从方程组(4.34)唯一地逐个确定出来.

(b) 在 $\lambda=0$ 是 k 重特征根的情形,即 $F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(k-1)}(0)=0$,而 $F^{(k)}(0)\neq0$,也就是 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0$,$a_{n-k}\neq0$. 这时相应地,方程(4.32)将为

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}=f(t). \tag{4.35}$$

令$\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}=z$,则方程(4.35)化为

$$\frac{\mathrm{d}^{n-k} z}{\mathrm{d}t^{n-k}}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}z}{\mathrm{d}t^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t), \tag{4.36}$$

对方程(4.36)来说,由于 $a_{n-k}\neq 0$, $\lambda=0$ 已不是它的特征根.因此,由(1)知它有形如$\tilde{z}=\widetilde{B}_0 t^m+\widetilde{B}_1 t^{m-1}+\cdots+\widetilde{B}_m$的特解,因而方程(4.35)有特解$\tilde{x}$满足

$$\frac{\mathrm{d}^k \tilde{x}}{\mathrm{d}t^k}=\tilde{z}=\widetilde{B}_0 t^m+\widetilde{B}_1 t^{m-1}+\cdots+\widetilde{B}_m .$$

这表明$\tilde{x}$是 t 的 $m+k$ 次多项式,其中 t 的幂次$\leqslant k-1$ 的项带有任意常数.但因我们只需要知道一个特解就够了.我们特别地取这些任意常数均为零,于是我们得到方程(4.35)(或方程(4.32))的一个特解

$$\tilde{x}=t^k(\gamma_0 t^m+\gamma_1 t^{m-1}+\cdots+\gamma_m),$$

这里 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$是已确定了的常数.

② 如果 $\lambda\neq 0$,则此时可像 4.2.2 做法一样,作变量变换 $x=y\mathrm{e}^{\lambda t}$,将方程(4.32)化为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+A_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+A_n y=b_0 t^m+\cdots+b_m, \tag{4.37}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$都是常数.而且特征方程(4.21)的根 λ 对应于方程(4.37)的特征方程的零根,并且重数也相同.因此,利用上面的结果就有如下结论:

在 λ 不是特征方程(4.21)的根的情形,方程(4.37)有特解$\tilde{y}=B_0 t^m+B_1 t^{m-1}+\cdots+B_m$,从而方程(4.32)有特解$\tilde{x}=(B_0 t^m+B_1 t^{m-1}+\cdots+B_m)\mathrm{e}^{\lambda t}$;

在 λ 是特征方程(4.21)的 k 重根的情形,方程(4.37)有特解

$\tilde{y}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m)$，从而方程(4.32)有特解

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_m)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

例 7 求方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=3t+1$ 的通解.

解 先求对应的齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=0$$

的通解. 这里特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 有两个根 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$. 因此，通解为 $x=c_1\mathrm{e}^{3t}+c_2\mathrm{e}^{-t}$，其中 c_1,c_2 为任意常数. 再求非齐次线性微分方程的一个特解. 这里 $f(t)=3t+1,\lambda=0$，又因为 $\lambda=0$不是特征根，故可取特解形如$\tilde{x}=A+Bt$，其中 A,B 为待定常数. 为了确定 A,B，将$\tilde{x}=A+Bt$ 代入原方程，得到

$$-2B-3A-3Bt=3t+1,$$

比较系数得

$$\begin{cases}-3B=3,\\-2B-3A=1,\end{cases}$$

由此得 $B=-1,A=\frac{1}{3}$，从而$\tilde{x}=\frac{1}{3}-t$，因此，原方程的通解为

$$x=c_1\mathrm{e}^{3t}+c_2\mathrm{e}^{-t}-t+\frac{1}{3}.$$

例 8 求方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=\mathrm{e}^{-t}$的通解.

解 从上例知道对应的齐次线性微分方程的通解为

$$x=c_1\mathrm{e}^{3t}+c_2\mathrm{e}^{-t},$$

其中 c_1,c_2为任意常数. 现求原方程的一个特解. 这里 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$，因为 $\lambda=-1$ 刚好是特征方程的单根，故有特解形如$\tilde{x}=At\mathrm{e}^{-t}$，将它代入原方程得到 $-4A\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}$，从而 $A=-\frac{1}{4}$，于是$\tilde{x}=-\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-t}$，而原方程的通解为

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{4} t e^{-t}.$$

例 9 求$\frac{d^3 x}{dt^3} + 3\frac{d^2 x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}(t-5)$的通解.

解 特征方程 $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0$ 有三重根 $\lambda_{1,2,3} = -1$,故有形状为$\tilde{x} = t^3(A+Bt)e^{-t}$的特解,将它代入方程得

$$(6A + 24Bt)e^{-t} = e^{-t}(t-5),$$

比较系数求得 $A = -\frac{5}{6}, B = \frac{1}{24}$. 从而$\tilde{x} = \frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$. 故方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t} + \frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t},$$

其中 c_1, c_2, c_3为任意常数.

类型Ⅱ

设 $f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$,其中 α, β 为常数,而 $A(t), B(t)$是带实系数的 t 的多项式,其中一个的次数为 m,而另一个的次数不超过 m,那么我们有如下结论:方程(4.32)有形如

$$\tilde{x} = t^k[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t} \tag{4.38}$$

的特解,这里 k 为特征方程$F(\lambda)=0$ 的根 $\alpha + i\beta$ 的重数,而$P(t)$, $Q(t)$均为待定的带实系数的次数不高于 m 的t 的多项式,可以通过比较系数的方法来确定.

事实上,回顾一下类型Ⅰ的讨论过程,易见当 λ 不是实数,而是复数时,有关结论仍然正确. 现将 $f(t)$表为指数形式

$$f(t) = \frac{A(t) - iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{A(t) + iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

根据非齐次线性微分方程的叠加原理(见习题 4.1 第 2 题),方程

$$L[x] = f_1(t) \equiv \frac{A(t) + iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

与

$$L[x]=f_2(t)\equiv\frac{A(t)-\mathrm{i}B(t)}{2}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}$$

的解之和必为方程(4.32)的解.

注意到$\overline{f_1(t)}=f_2(t)$,易知,若 x_1 为 $L[x]=f_1(t)$的解,则$\overline{x_1}$必为 $L[x]=f_2(t)$的解.因此,直接利用类型Ⅰ的结果,可知方程(4.32)有解形如

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=t^kD(t)\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}+t^k\overline{D(t)}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\\&=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]\mathrm{e}^{\alpha t},\end{aligned}$$

其中 $D(t)$为 t 的 m 次多项式,而 $P(t)=2\mathrm{Re}\{D(t)\}$,$Q(t)=2\mathrm{Im}\{D(t)\}$.

显然,$P(t)$,$Q(t)$为带实系数的 t 的多项式,其次数不高于 m.可见上述结论成立.

注意,正确写出特解形式是待定系数法的关键问题,在此类型的求解过程中应把 $P(t)$,$Q(t)$均假设为 m 次完全多项式来实际演算.

例 10 求方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=\cos 2t$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$ 有重根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$,因此,对应的齐次线性微分方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{-2t},$$

其中 c_1,c_2为任意常数.现求非齐次线性微分方程的一个特解.因为$\pm 2\mathrm{i}$不是特征根,我们求形如$\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$ 的特解,将它代入原方程并化简得到

$$8B\cos 2t-8A\sin 2t=\cos 2t,$$

比较同类项系数得 $A=0$,$B=\frac{1}{8}$,从而$\tilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$,因此原方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t.$$

附注 类型Ⅱ的特殊情形

$$f(t)=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \text{ 或 } f(t)=B(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

可用另一更简便的方法——所谓**复数法**求解.下面用例子具体说明解题过程.

例 11 用复数法解例 10.

解 由例 10 已知对应的齐次线性微分方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}.$$

为求非齐次线性微分方程的一个特解,我们先求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=e^{2it}$$

的特解.这属于类型Ⅰ,而 2i 不是特征根,故可设特解为 $\tilde{x}=Ae^{2it}$,将它代入方程并消去因子 e^{2it} 得 $8iA=1$,因而 $A=-\frac{i}{8}$, $\tilde{x}=-\frac{i}{8}e^{2it}=-\frac{i}{8}\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t$,分出它的实部 $\mathrm{Re}\{\tilde{x}\}=\frac{1}{8}\sin 2t$,根据定理 9 这就是原方程的特解,于是原方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t.$$

与例 10 所得结果相同.

(2) 拉普拉斯变换法

常系数线性微分方程(组)还可以应用拉普拉斯变换法进行求解,这往往比较简便.

由积分

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$$

所定义的确定于复平面($\mathrm{Re}\ s>\sigma$)上的复变数 s 的函数 $F(s)$,称为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**,其中 $f(t)$ 于 $t\geqslant 0$ 有定义,且满足不等式

$$|f(t)| < Me^{\sigma t}①,$$

这里 M,σ 为某两个正常数.我们将称 $f(t)$ 为**原函数**,而 $F(s)$ 称为**像函数**.

拉普拉斯变换法主要是借助于拉普拉斯变换把常系数线性微分方程(组)转换成复变数 s 的代数方程(组).通过一些代数运算,一般地再利用拉普拉斯变换表,即可求出微分方程(组)的解.方法十分简单方便,为工程技术工作者所普遍采用.当然,方法本身也有一定的局限性,它要求所考察的微分方程的右端函数必须是原函数,否则方法就不适用了.

关于拉普拉斯变换的一般概念及基本性质,请参阅有关书籍[9],这里只列出部分常用函数的拉普拉斯变换简表(见表(4.1)),供学习时使用参考,而且只简单地介绍拉普拉斯变换在解常系数线性微分方程中的应用,关于在微分方程组方面的应用,留待下一章有关部分再介绍.如果已有较好计算机软件基础知识的读者,即可参考本书附录Ⅱ,直接对某些方程求解.

设给定微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t) \tag{4.32}$$

及初始条件

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0', \cdots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)},$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常数,而 $f(t)$ 连续且满足原函数的条件.

注意,如果 $x(t)$ 是方程(4.32)的任意解,则 $x(t)$ 及其各阶导数 $x^{(k)}(t)(k=1,2,\cdots,n)$ 均是原函数.记

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] \equiv \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt,$$

$$X(s) = \mathscr{L}[x(t)] \equiv \int_0^{+\infty} e^{-st}x(t)dt.$$

---

① 对于复值的 $f(t)$,$|f(t)|$ 表其模.

表(4.1)　拉普拉斯变换表

序号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$	$F(s)$的定义域
1	1	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\, s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\, s>0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\, s>0$
4	e^{zt}	$\frac{1}{s-z}$	$\mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\, z$
5	te^{zt}	$\frac{1}{(s-z)^2}$	$\mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\, z$
6	$t^n e^{zt}$	$\frac{n!}{(s-z)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\, z$
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\, s>0$
8	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\, s>0$
9	$\mathrm{sh}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}\, s>\lvert\omega\rvert$
10	$\mathrm{ch}\, \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}\, s<\lvert\omega\rvert$
11	$t\sin \omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}\, s>0$
12	$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}\, s>0$
13	$e^{\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\, s>\lambda$
14	$e^{\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\, s>\lambda$
15	$te^{\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$\mathrm{Re}\, s>\lambda$
16	$te^{\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$\mathrm{Re}\, s>\lambda$

那么，按原函数微分性质有

$$\mathscr{L}[x'(t)] = sX(s) - x_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathscr{L}[x^{(n)}(t)] = s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_0' - \cdots - x_0^{(n-1)},$$

于是，对方程(4.32)两端施行拉普拉斯变换，并利用线性性质就得到

$$\begin{aligned} & s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_0' - \cdots - sx_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)} \\ & + a_1[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - s^{n-3}x_0' - \cdots - x_0^{(n-2)}] \\ & + \cdots + a_{n-1}[sX(s) - x_0] + a_n X(s) = F(s), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)X(s) \\ = & F(s) + (s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1})x_0 \\ & + (s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \cdots + a_{n-2})x_0' + \cdots + x_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

或

$$A(s)X(s) = F(s) + B(s),$$

其中 $A(s)$，$B(s)$和 $F(s)$都是已知多项式，由此

$$X(s) = \frac{F(s) + B(s)}{A(s)},$$

这就是方程(4.32)的满足所给初始条件的解 $x(t)$的像函数．而 $x(t)$可直接查拉普拉斯变换表或由反变换公式计算求得．下面举几个用这种方法解方程的例子．

例 12 求方程$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = \mathrm{e}^{2t}$满足初值条件$x(0) = 0$的解．

解 对方程两端实行拉普拉斯变换，得到方程的解的像函数所应满足的方程

$$sX(s) - x(0) - X(s) = \frac{1}{s-2},$$

由此，并注意到 $x(0) = 0$，得

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

直接查拉普拉斯变换表，可得$\frac{1}{s-2}$和$\frac{1}{s-1}$的原函数分别为 e^{2t} 和 e^{t}.因此，利用线性性质，就求得 $X(s)$的原函数为

$$x(t)=e^{2t}-e^{t},$$

这就是所要求的解.

例 13 求解方程 $x''+2x'+x=e^{-t}, x(1)=x'(1)=0$.

解 先令 $\tau=t-1$，将问题化为

$$x''+2x'+x=e^{-(\tau+1)}, x(0)=x'(0)=0,$$

再对新方程两边作拉普拉斯变换，得到

$$s^2X(s)+2sX(s)+X(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{e},$$

因此

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)^3}\cdot\frac{1}{e}.$$

查拉普拉斯变换表可得

$$x(\tau)=\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau-1},$$

从而

$$x(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2e^{-t},$$

这就是所要求的解.

例 14 求方程 $x'''+3x''+3x'+x=1$ 的满足初值条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ 的解.

解 对方程两边施行拉普拉斯变换得

$$(s^3+3s^2+3s+1)X(s)=\frac{1}{s},$$

由此得

$$X(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}.$$

把上式右端分解成部分分式

$$\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3},$$

对上式右端各项分别求出(查表)其原函数,则它们的和就是$X(s)$的原函数

$$x(t)=1-\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}=1-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)\mathrm{e}^{-t},$$

这就是所要求的解.

例 15 求解方程 $x''+a^2x=b\sin at; x(0)=x_0, x'(0)=x_0'$,其中 a,b 为非零常数.

解 对方程实行拉普拉斯变换,得到

$$s^2X(s)-x_0s-x_0'+a^2X(s)=\frac{ab}{s^2+a^2},$$

即

$$X(s)=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+x_0'\frac{1}{s^2+a^2}.$$

把上式右端第一项分解为部分分式

$$\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right],$$

于是

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+x_0'\frac{1}{s^2+a^2}\\&=\frac{b}{2a^2}\left[\frac{a}{s^2+a^2}-a\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{x_0'}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

由拉普拉斯变换表可求得

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at)+x_0\cos at+\frac{x_0'}{a}\sin at\\&=\frac{1}{2a^2}[(b+2ax_0')\sin at+a(2ax_0-bt)\cos at],\end{aligned}$$

此即为所要求的解.

4.2.4 质点振动

振动是日常生活和工程技术中常见的一种运动形式.例如钟摆的往复摆动、弹簧的振动、乐器中弦线的振动、机床主轴的振动、电路中的电磁振荡等等.振动问题的研究,在一定条件下,可以归结为二阶常系数线性微分方程的问题来讨论.下面我们以第一章里所举的力学典型例子数学摆作为具体的物理模型,利用常系数线性微分方程的理论,讨论有关自由振动和强迫振动的问题,并阐明有关的一些物理现象.至于 RLC 电路中的电磁振荡完全可以同样地加以讨论.

(1) 无阻尼自由振动

考察数学摆的无阻尼微小自由振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0, \tag{1.9}$$

记 $\frac{g}{l}=\omega^2$,这里 $\omega>0$ 是常数,(1.9)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\varphi=0. \tag{4.39}$$

这是二阶常系数齐次线性微分方程,它的特征方程为

$$\lambda^2+\omega^2=0,$$

特征根为共轭复根

$$\lambda_{1,2}=\pm\omega\mathrm{i}.$$

因此,方程(4.39)的通解为

$$\varphi=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t, \tag{4.40}$$

其中 c_1,c_2 为常数.为了获得明显的物理意义,令

$$\sin\theta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\quad \cos\theta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},$$

因此,若取

$$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\quad \theta=\arctan\frac{c_1}{c_2},$$

则(4.40)可以写成

$$\varphi=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\omega t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\omega t\right)$$

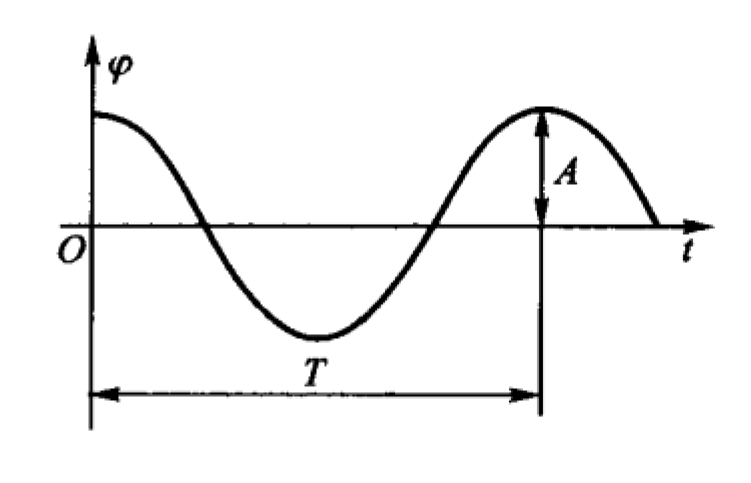
$$=A(\sin\theta\cos\omega t+\cos\theta\sin\omega t),$$

即

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta),\tag{4.41}$$

这里 A,θ 代替了 c_1,c_2 作为通解中所含的两个任意常数.

从通解(4.41)可以看出,不论反映摆的初始状态的 A 与 θ 为何值,摆的运动总是一个正弦函数,它是 t 的周期函数(参看图(4.1)).这种运动称为**简谐振动**.振动往返一次所需的时间称为**周期**,记为 T,这里 $T=\frac{2\pi}{\omega}$;单位时间内振动的次数称为**频率**,记作 ν,这里 $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$;而 $\omega=2\pi\nu$ 称为**圆频率**.从而得出结论:数学摆的周期只依赖于摆长 l,而与初值无关.



图(4.1)

此外,摆离开平衡位置的最大偏离称为**振幅**.数学摆的振幅为 A,而 θ 称为**初位相**.这里,振幅和初位相都依赖于初值条件.

如果把数学摆移至位置 $\varphi=\varphi_0$ 处,然后突然松开,使其自由摆动,这就相当于给定如下的初值条件:

$$t=0\text{ 时},\varphi=\varphi_0,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0.\tag{4.42}$$

把(4.42)代入通解(4.41),得到

$$\varphi|_{t=0} = A\sin\theta = \varphi_0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = A\omega\cos\theta = 0,$$

于是得初位相 $\theta = \frac{\pi}{2}$,振幅 $A = \varphi_0$.因此,所求的特解为

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi_0 \cos\omega t.$$

(2) 有阻尼自由振动

从通解(4.41)可以看到,无阻尼的自由振动是按正弦规律作周期运动,摆动似乎可以无限期的进行下去.但是,实际情况并不是如此,摆总是经过一段时间的摆动后就会停下来,这说明我们所得的方程并没有完全反映物体运动的规律.因为空气阻力在实际上总是难免的,因此必须把运动阻力这一因素考虑进去,从而得到第一章已推导过的摆的有阻尼的自由振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{1.10}$$

记 $\frac{\mu}{m} = 2n$, $\frac{g}{l} = \omega^2$,这里 n, ω 是正常数,(1.10)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + 2n\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \omega^2\varphi = 0. \tag{4.43}$$

它的特征方程为

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0, \tag{4.44}$$

特征根为

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}.$$

对于不同的阻尼值 n,微分方程有不同形式的解,它表示不同的运动形式,现分下面三种情况进行讨论:

① 小阻尼的情形:即 $n < \omega$ 的情形,这时 λ_1, λ_2 为一对共轭复根,记 $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$,则 $\lambda_{1,2} = -n \pm \omega_1 \mathrm{i}$.而方程(4.43)的通解为

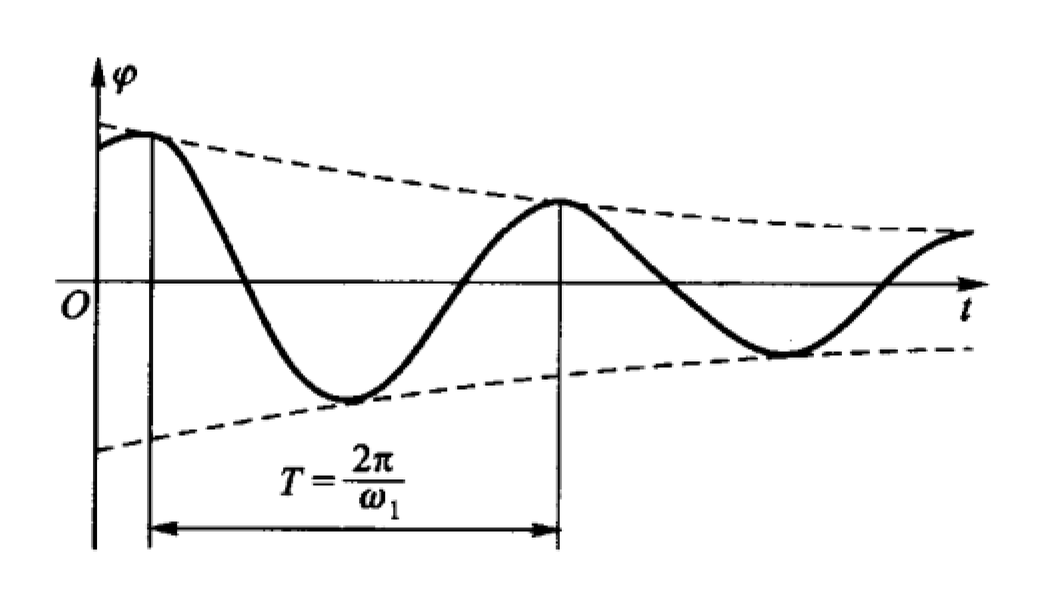
$$\varphi = e^{-nt}(c_1\cos\omega_1 t + c_2\sin\omega_1 t).$$

和前面无阻尼的情形一样,可以把上述通解改写成如下形式:

$$\varphi = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \theta), \tag{4.45}$$

这里 A,θ 为任意常数.

从(4.45)可见,摆的运动已不是周期的,振动的最大偏离随着时间增加而不断减小,而摆从一个最大偏离到达同侧下一个最大偏离所需的时间为 $T=\frac{2\pi}{\omega_1}$. 图(4.2)表示函数(4.45)的图形,图上虚线是 $\varphi = Ae^{-nt}$ 的图形.而实线表示摆运动的偏离随时间变化的规律,它夹在两条虚线中间振动.因为阻尼的存在,摆的最大偏离随时间增大而不断减小,最后摆趋于平衡位置 $\varphi=0$.



图(4.2)

② 大阻尼的情形:即 $n>\omega$ 的情形,这时 $\lambda_2<\lambda_1<0$,特征方程(4.44)有两个不同的负实根.方程(4.43)的通解为

$$\varphi = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{4.46}$$

这里 c_1,c_2是任意常数.

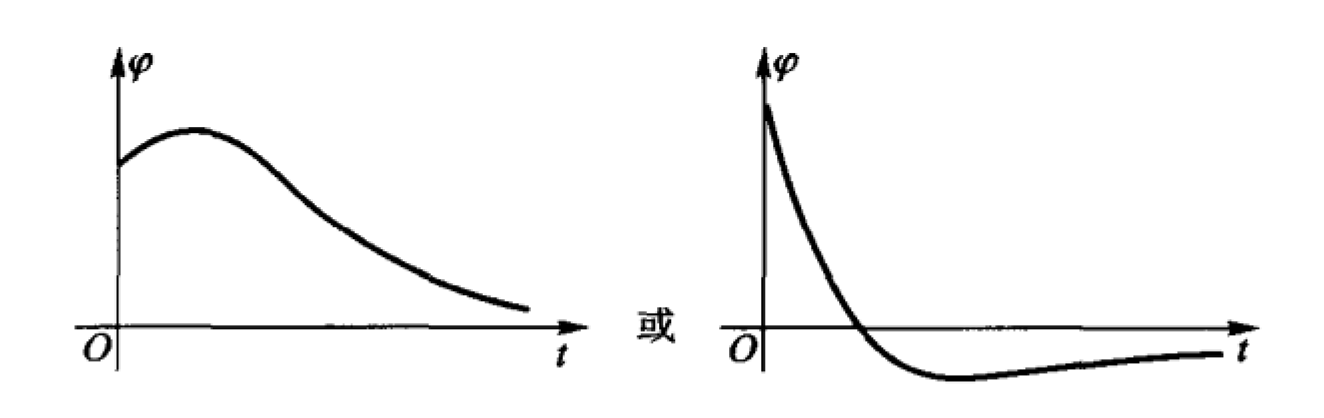
从(4.46)可以看出,摆的运动也不是周期的,因为方程 $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=0$ 对于 t最多只有一个解,因此,摆最多只通过平衡位置一次,又因为

$$\frac{d\varphi}{dt}=c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$=e^{\lambda_1 t}[c_1\lambda_1+c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}]$$

得知,当 t 足够大时,$\frac{d\varphi}{dt}$的符号与 c_1 的符号相反.因此,经过一段时间后,摆就单调地趋于平衡位置,因而在大阻尼的情形,运动不是周期的,且不再具有振动的性质.摆的运动规律(4.46)的图形如图(4.3)所示.

③ 临界阻尼的情形:即 $n=\omega$ 的情形,这时特征方程(4.44)有重根 $\lambda_1=\lambda_2=-n$.方程(4.43)的通解为

$$\varphi=e^{-nt}(c_1+c_2t),\tag{4.47}$$



图(4.3)

这里 c_1,c_2是任意常数.

从(4.47)可以看出,摆的运动也不是周期的,它的运动规律(4.47)的图形和图(4.3)相类似.摆也不具有振动的性质.数值 $n=\omega$称为**阻尼的临界值**,这一数值正好足够抑制振动.这里临界值的意思是指:摆处于振动状态或不振动状态的阻尼分界值,即当 $n\geqslant\omega$时,摆不具有振动性质,运动规律如图(4.3)所示.而当$n<\omega$时,摆具有振动性质,运动规律如图(4.2)所示.

(3) 无阻尼强迫振动

以上谈到的无阻尼自由振动和有阻尼自由振动都属于自由振动,它对应于一个二阶常系数齐次线性微分方程.当一个振动系统

还经常受到一个外力作用时,这种振动称为强迫振动.最常见的外力往往是按周期变化的,这里考察周期外力特别是按正弦变化的外力作用下的强迫振动.我们仍以数学摆为例.

数学摆的微小强迫振动方程可写为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t). \tag{1.11}$$

考察无阻尼强迫振动,即 $\mu=0$ 的情形.令 $\frac{g}{l}=\omega^2$,设 $\frac{F(t)}{ml}=H\sin pt$,H 为已知常数,p 为外力圆频率.这时(1.11)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=H\sin pt. \tag{4.48}$$

方程(4.48)的对应齐次线性微分方程的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta), \tag{4.41}$$

这里 A,θ 是任意常数.现求(4.48)的一个特解.如果 $\omega\neq p$,则(4.48)有形如

$$\tilde{\varphi}=M\cos pt+N\sin pt \tag{4.49}$$

的解,这里 M,N 是待定常数.将(4.49)代入(4.48),比较同类项系数,得到

$$M=0,\quad N=\frac{H}{\omega^2-p^2}.$$

因此,方程(4.48)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)+\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt. \tag{4.50}$$

通解(4.50)由两部分组成,第一部分是无阻尼自由振动的解 $A\sin(\omega t+\theta)$,它代表固有振动,第二部分是振动频率与外力频率相同,而振幅不同的项 $\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt$,它代表由外力引起的强迫振动.从(4.50)还可以看出,如果外力的圆频率 p 愈接近固有圆频率 ω,则强迫振动项的振幅就愈大.

如果 $p=\omega$,则(4.48)有形如

$$\tilde{\varphi}=t(M\cos\omega t+N\sin\omega t)$$

的解,将它代入(4.48),比较同类项系数得到

$$M=-\frac{H}{2\omega},\quad N=0.$$

因而,方程(4.48)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)-\frac{H}{2\omega}t\cos\omega t. \tag{4.51}$$

(4.51)表示随着时间的增大,摆的偏离将无限增加,这种现象称为**共振现象**.但是,实际上,随着摆的偏离的增加,到了一定程度,方程(4.48)就不能描述摆的运动状态了.

(4) 有阻尼强迫振动

这时摆的运动方程(1.11)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt. \tag{4.52}$$

根据实际的需要,我们只讨论小阻尼的情形,即 $n<\omega$ 的情形.这时(4.52)对应的齐次线性微分方程的通解为

$$\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta), \tag{4.45}$$

这里 A,θ 是任意常数,$\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$(见(2)有阻尼自由振动中的情形①).

现求(4.52)的一个特解,这时可以寻求形如

$$\tilde{\varphi}=M\cos pt+N\sin pt \tag{4.53}$$

的特解,这里 M,N 是待定常数.将(4.53)代入(4.52),比较同类项系数,得到

$$M=\frac{-2npH}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2},\quad N=\frac{(\omega^2-p^2)H}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}.$$

为了获得更明显的物理意义,令

$$M=H^*\sin\theta^*,N=H^*\cos\theta^*,$$

即令

$$H^*=\sqrt{M^2+N^2}=\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \tag{4.54}$$

及

$$\tan\theta^* = \frac{-2np}{\omega^2 - p^2},$$

这时(4.53)可以写成

$$\tilde{\varphi} = H^* \sin\theta^* \cos pt + H^* \cos\theta^* \sin pt = H^* \sin(pt + \theta^*),$$

因此,(4.52)的通解为

$$\varphi = A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega_1 t + \theta) + \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt + \theta^*). \tag{4.55}$$

从(4.55)可以看到,摆的运动由两部分叠加而成,第一部分是有阻尼的自由振动,它是系统本身的固有振动,它随时间的增长而衰减,第二部分是由外力而引起的强迫振动项,它的振幅不随时间的增长而衰减.因此,考虑强迫振动时主要就考虑后一项 $\frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt + \theta^*)$,它与外力的频率一样,但相位和振幅都不同了.

我们现在来研究外力的圆频率 p 取什么值时所引起的强迫振动项的振幅 H^* 达到最大值.

从(4.54)看出,只需讨论当 p 取何值时 $(\omega^2 - p)^2 + 4n^2p^2$ 达到最小值即可.为此,记 $\Phi(p) = (\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2$,将它对 p 求导数,并令导数等于零,得到

$$\Phi'(p) = -4p(\omega^2 - p^2) + 8n^2p = 0.$$

因此,只要 $2n^2 < \omega^2$,即只要阻尼很小时,就解得

$$p = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}. \tag{4.56}$$

而当 p 取此值时,我们有 $\Phi''(p) = 8p^2 > 0$,因而 $\Phi(p)$ 在

$$p = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}$$

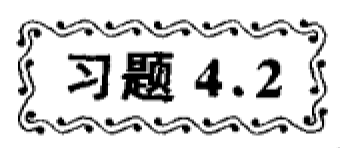
时达到最小值.

把(4.56)代入(4.54),得到相应的最大振幅值为

$$H_{\max}^{*}=\frac{H}{\sqrt{4n^{4}+4n^{2}(\omega^{2}-2n^{2})}}=\frac{H}{2n\sqrt{\omega^{2}-n^{2}}}.$$

就是说,当外力的圆频率 $p=\sqrt{\omega^{2}-2n^{2}}$ 时,强迫振动项的振幅达到最大值,这时的圆频率称为**共振频率**,所产生的现象也叫**共振现象**.

在发生共振现象时,一个振动系统在不太大的外力作用下会产生很大振幅的振动,以致引起破坏性的效果.例如一个电动机固定在一个能作弹性振动的座台上,电动机转动时产生出周期性的力,这力摇动座台,使座台处在强迫振动的状态中,当外力的频率接近于固有频率时,在无阻尼或小阻尼的情形,就会发生共振现象,电动机传给座台很大的能量,因而座台振动的振幅能够增大到使座台损坏的程度.因此,在工程技术中往往要尽量避免共振现象的发生.但是,只要我们掌握共振的规律,也可以利用共振为我们服务.例如,收音机的调频就是利用共振的作用,乐器的构造也是利用共振的原理.



习题 4.2

1. 证明定理 8 和定理 9.

2. 求解下列常系数线性微分方程:

(1) $x^{(4)}-5x''+4x=0$;

(2) $x'''-3ax''+3a^{2}x'-a^{3}x=0$;

(3) $x^{(5)}-4x'''=0$;

(4) $x''+x'+x=0$;

(5) $s''-a^{2}s=t+1$;

(6) $x'''-4x''+5x'-2x=2t+3$;

(7) $x^{(4)}-2x''+x=t^{2}-3$;

(8) $x'''-x=\cos t$;

(9) $x''+x'-2x=8\sin 2t$;

(10) $x'''-x=e^{t}$;

(11) $s'' + 2as' + a^2 s = e^t$;

(12) $x'' + 6x' + 5x = e^{2t}$;

(13) $x'' - 2x' + 3x = e^{-t}\cos t$;

(14) $x'' + x = \sin t - \cos 2t$;

(15) $x'' - 4x' + 4x = e^t + e^{2t} + 1$;

(16) $x'' + 9x = t\sin 3t$;

(17) $x'' - 2x' + 2x = te^t\cos t$;

(18) $x'' + 2x' + 5x = 4e^{-t} + 17\sin 2t$;

(19) $x'' + x = \dfrac{1}{\sin^3 t}$;

(20) $x'' + x = 1 - \dfrac{1}{\sin t}$.

3. 求下列方程的通解：

(1) $t^2x'' + tx' - x = 0$;

(2) $t^2x'' - 4tx' + 6x = t$;

(3) $t^2x'' - 3tx' - 8x = t\ln t$;

(4) $t^2x'' - tx' + 2x = 18t\cos(\ln t)$.

4. 求下组初值问题的解：

(1) $x'' + 9x = 6e^{3t}, x(0) = x'(0) = 0$;

(2) $x^{(4)} + x = 2e^t, x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1$.

5. 火车沿水平的道路运动.火车的质量是 P,机车的牵引力是 F,运动时的阻力 $W = a + bV$,其中 a, b 是常数,而 V 是火车的速度;S 是走过的路程.试确定火车的运动规律,设 $t = 0$ 时 $S = 0, V = 0$.

6. 设 $\varphi(t)$是方程 $x'' + k^2x = f(t)$的解,其中 k 为常数,函数 $f(t)$于 $0 \leqslant t < +\infty$连续,试证：

(1) 当 $k \neq 0$ 时,能够选择常数 c_1, c_2的值,使得

$$\varphi(t) = c_1\cos kt + \frac{c_2}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\mathrm{d}s \quad (0 \leqslant t < +\infty);$$

(2) 当 $k = 0$ 时,方程的通解可表为

$$x = c_1 + c_2 t + \int_0^t (t-s)f(s)\mathrm{d}s \quad (0 \leqslant t < +\infty),$$

其中 c_1, c_2为任意常数.

7. 给定方程 $x''' + 5x'' + 6x' = f(t)$，其中 $f(t)$ 在 $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ 上连续，设 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 是上述方程的两个解，证明极限 $\lim\limits_{t\to\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$ 存在.

§4.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法

一般的高阶微分方程没有普遍的解法，处理问题的基本原则是降阶，利用变换把高阶微分方程的求解问题化为较低阶的方程来求解.因为一般说来，低阶微分方程的求解会比求解高阶微分方程方便些.特别地，对于二阶(变系数)齐次线性微分方程，如能知道它的一个非零特解，则可利用降阶法求得与它线性无关的另一个特解，从而得到方程的通解；对于非齐次线性微分方程，只需再运用常数变易法求出它的一个特解，问题也就解决了.因此，问题的关键就在于寻找齐次线性微分方程的一个非零特解.本节主要介绍一些可降阶的方程类型和求二阶线性微分方程的幂级数解法.

4.3.1 可降阶的一些方程类型

n 阶微分方程一般地可写为

$$F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0.$$

下面讨论三类特殊方程的降阶问题.

(1) 方程不显含未知函数 x，或更一般地，设方程不含 $x, x', \cdots, x^{(k-1)}$，即方程呈形状

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{4.57}$$

若令 $x^{(k)} = y$，则方程即降为关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}) = 0. \tag{4.58}$$

如果能够求得方程(4.58)的通解

$$y = \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}),$$

即

$$x^{(k)} = \varphi(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k}),$$

再经过 k 次积分得到

$$x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n),$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数. 可以验证,这就是方程(4.57)的通解.

特别地,若二阶方程不显含 x(相当于 $n=2,k=1$ 的情形),则用变换 $x'=y$ 便把方程化为一阶方程.

例 1 求方程 $\dfrac{d^5x}{dt^5}-\dfrac{1}{t}\dfrac{d^4x}{dt^4}=0$ 的解.

解 令 $\dfrac{d^4x}{dt^4}=y$,则方程化为

$$\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t}y=0,$$

这是一阶方程,积分后得 $y=ct$,即 $\dfrac{d^4x}{dt^4}=ct$. 于是

$$x=c_1t^5+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5,$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_5$ 为任意常数,这就是原方程的通解.

(2) 不显含自变量 t 的方程

$$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0. \tag{4.59}$$

我们指出,若令 $x'=y$,并以它为新未知函数,而视 x 为新自变量,则方程就可降低一阶.

事实上,在所作的假定下,$x'=y$, $x''=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}x'=y\dfrac{dy}{dx}$, $x'''=y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2\dfrac{d^2y}{dx^2},\cdots$,采用数学归纳法不难证明,$x^{(k)}$ 可用 $y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ 表出($k\leqslant n$). 将这些表达式代入(4.59)就得到

$$G\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0,$$

这是关于 x,y 的 $n-1$ 阶方程,比原方程(4.59)低一阶.

例 2 求解方程 $xx''+(x')^2=0$

解 令 $x'=y$,直接计算可得 $x''=y\dfrac{dy}{dx}$,于是原方程化为 $xy\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$,得到 $y=0$ 或 $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$,积分后得 $y=\dfrac{c}{x}$,即 $x'=\dfrac{c}{x}$,所以 $x^2=c_1t+c_2(c_1=2c)$,这就是原方程的通解.

例 3 求数学摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.8}$$

满足初值条件:当 $t=0$ 时,$\varphi=\varphi_0>0,\dfrac{d\varphi}{dt}=0$ 的解.

解 令 $\dfrac{d\varphi}{dt}=p$,则 $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}=p\dfrac{dp}{d\varphi}$.这时,方程(1.8)变为

$$p\frac{dp}{d\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi,$$

积分之,得到

$$\frac{1}{2}p^2=\frac{g}{l}(\cos\varphi+c_1),$$

或者

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{g}{l}(\cos\varphi+c_1), \tag{4.60}$$

这里 c_1 是任意常数.用初值条件代入(4.60),得到 $c_1=-\cos\varphi_0$.于是(4.60)变为

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0),$$

将上式开方得到

$$\frac{d\varphi}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}. \tag{4.61}$$

我们先讨论摆从最大的正偏离角 $\varphi=\varphi_0$ 到最大的负偏离角 $\varphi=-\varphi_0$ 之间的第一次摆动的情况,这时 $\dfrac{d\varphi}{dt}<0$,(4.61)的右端取负号,得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}. \tag{4.62}$$

将方程(4.62)分离变量,然后积分,并计及初值条件即得

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = -\int_0^t \sqrt{\frac{2g}{l}}\mathrm{d}t = -t\sqrt{\frac{2g}{l}}, \tag{4.63}$$

令

$$t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}},$$

则(4.63)可写为

$$t_0 - t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}, \tag{4.64}$$

这里 t_0是代表摆从最大正偏离角 $\varphi=\varphi_0$第一次到达 $\varphi=0$ 所需的时间.经过 $2t_0$的时间,摆到达最大负偏离角的位置 $\varphi=-\varphi_0$,然后,摆又开始向右端运动,这时$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}>0$,(4.62)式已不能描述摆的运动了.故所得的解(4.64)只适用于 $0\leqslant t\leqslant 2t_0$ 的区间.对于 $t=2t_0$之后的一段时间(4.61)的右端取正号,得到方程

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}.$$

积分之,并注意到此时初值条件为 $t=2t_0$时 $\varphi=-\varphi_0$,得到

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \int_{2t_0}^{t}\sqrt{\frac{2g}{l}}\mathrm{d}t = (t-2t_0)\sqrt{\frac{2g}{l}}, \tag{4.65}$$

再注意到

$$\int_0^{-\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = -\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}},$$

可将(4.65)写为

$$t-3t_0=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}. \tag{4.66}$$

当 $t=4t_0$ 时,摆又回复到 $\varphi=\varphi_0$,然后又向左端运动.(4.66)在区间 $2t_0\leqslant t\leqslant 4t_0$ 上适用.在 $4t_0\leqslant t\leqslant 6t_0$ 区间上摆的运动又由方程(4.64)描述.摆在 $\varphi=\varphi_0$ 和 $\varphi=-\varphi_0$ 之间做周期性的摆动,所以,我们只需就区间 $0\leqslant t\leqslant 4t_0$ 讨论摆的运动已足够了.摆从 $\varphi=\varphi_0$ 到 $\varphi=-\varphi_0$ 的摆动情况由方程(4.64)描述;而摆从 $\varphi=-\varphi_0$ 再到 $\varphi=\varphi_0$ 的摆动情况由方程(4.66)描述.积分 $\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$ 是不能用初等函数表示出来的,这是一个椭圆积分.我们可将这里得到的结果与前面用 φ 近似 $\sin\varphi$ 所得的线性微分方程的结果作一个比较,就知此处非线性的情形比线性化了的情形复杂得多了.

(3) 齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0. \tag{4.2}$$

我们知道,方程(4.2)的求解问题归结为寻求方程的 n 个线性无关的特解,但如何求这些特解呢?没有普遍的方法可循.这是与常系数线性微分方程的极大差异之处.但是我们指出,如果知道方程的一个非零特解,则利用变换,可将方程降低一阶;或更一般地,若知道方程的 k 个线性无关的特解,则可通过一系列同类型的变换,使方程降低 k 阶.并且新得到的 $n-k$ 阶方程也是齐次线性的.

事实上,设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是方程(4.2)的 k 个线性无关解,显然 $x_i\neq 0(i=1,2,\cdots,k)$,令 $x=x_k y$,直接计算可得

$$x'=x_k y'+x_k' y,$$

$$x''=x_k y''+2x_k' y'+x_k'' y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(n)}=x_k y^{(n)}+nx_k' y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}x_k'' y^{(n-2)}+\cdots+x_k^{(n)}y.$$

将这些关系式代入(4.2),得到

$$x_k y^{(n)} + [n x_k' + a_1(t) x_k] y^{(n-1)} + \cdots + [x_k^{(n)} + a_1 x_k^{(n-1)} + \cdots + a_n x_k] y = 0,$$

这是关于 y 的 n 阶方程,且各项系数是 t 的已知函数,而 y 的系数恒等于零,因为 x_k 是(4.2)的解.因此,如果引入新未知函数 $z = y'$,并在 $x_k \neq 0$ 的区间上用 x_k 除方程的各项,我们便得到形状如

$$z^{(n-1)} + b_1(t) z^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}(t) z = 0 \qquad (4.67)$$

的 $n-1$ 阶齐次线性微分方程.

方程(4.67)的解与(4.2)的解之间的关系,由以上变换知道为 $z = y' = \left(\dfrac{x}{x_k}\right)'$,或 $x = x_k \int z \mathrm{d}t$.因此,对于方程(4.67),我们就知道它的 $k-1$ 个线性无关解 $z_i = \left(\dfrac{x_i}{x_k}\right)'$ $(i = 1, 2, \cdots, k-1)$.

事实上,$z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}$ 是方程(4.67)的解,这一点是显然的.假设这 $k-1$ 个解之间存在关系式

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_{k-1} z_{k-1} \equiv 0,$$

或

$$\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_k}\right)' + \alpha_2 \left(\frac{x_2}{x_k}\right)' + \cdots + \alpha_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)' \equiv 0,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ 是常数.那么,就有

$$\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_k}\right) + \alpha_2 \left(\frac{x_2}{x_k}\right) + \cdots + \alpha_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right) \equiv -\alpha_k,$$

或

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k x_k \equiv 0,$$

由于 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 线性无关,故必有 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.这就是说 $z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}$ 是线性无关的.

因此,若对方程(4.67)仿以上做法,令 $z = z_{k-1} \int u \mathrm{d}t$,则可将

方程化为关于 u 的 $n-2$ 阶齐次线性微分方程

$$u^{(n-2)}+c_1(t)u^{(n-3)}+\cdots+c_{n-2}(t)u=0, \qquad (4.68)$$

并且还知道方程(4.68)的 $k-2$ 个线性无关解

$$u_i=\left(\frac{z_i}{z_{k-1}}\right)', \qquad i=1,2,\cdots,k-2.$$

由上面的讨论我们看到,利用 k 个线性无关特解当中的一个解 x_k,可以把方程(4.2)降低一阶,成为 $n-1$ 阶齐次线性微分方程(4.67),并且知道它的 $k-1$ 个线性无关解;而利用两个线性无关解 x_{k-1},x_k,则可以把方程(4.2)降低两阶,成为 $n-2$ 阶齐次线性微分方程(4.68),同时知道它的 $k-2$ 个线性无关解.依此类推,继续上面的做法,若利用了方程的 k 个线性无关解 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,则最后我们就得到一个 $n-k$ 阶的齐次线性微分方程.这就是说把方程(4.2)降低了 k 阶.

特别地,对于二阶齐次线性微分方程,如果知道它的一个非零解,则方程的求解问题就解决了.

事实上,设 $x=x_1\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=0 \qquad (4.69)$$

的解,则由上面讨论知道,经变换 $x=x_1\int y\mathrm{d}t$ 后,方程就化成

$$x_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+[2x_1'+p(t)x_1]y=0,$$

这是一阶线性微分方程.解之得

$$y=c\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t},$$

因而

$$x=x_1\left[c_1+c\int\frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right], \qquad (4.70)$$

这里 c,c_1 是任意常数.

取 $c_1=0, c=1$,我们得到方程(4.69)的一个特解

$$x = x_1\int \frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}dt,$$

它与 x_1 显然是线性无关的,因为它们之比不等于常数(见习题 4.1 第 1 题).于是,表达式(4.70)是(4.69)的通解,它包括了方程(4.69)的所有解.

例 4 已知 $x=\frac{\sin t}{t}$是方程 $x''+\frac{2}{t}x'+x=0$ 的解,试求方程的通解.

解 这里 $p(t)=\frac{2}{t}$,由(4.70)得到

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin t}{t}\left(c_1 + c\int \frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{t^2}dt\right) \\ &= \frac{\sin t}{t}(c_1 - c\cot t) = \frac{1}{t}(c_1\sin t - c\cos t), \end{aligned}$$

其中 c_1, c 是任意常数,这就是方程的通解.

4.3.2 二阶线性微分方程的幂级数解法

由上面讨论知道,二阶变系数齐次线性微分方程的求解问题归结为寻求它的一个非零解.由于方程的系数是自变量的函数,我们不能像§4.2 那样利用代数方法去求解.但是,从微积分学中知道,在满足某些条件下,可以用幂级数来表示一个函数.因此,自然想到,能否用幂级数来表示微分方程的解呢?下面就来讨论这一问题.首先看两个简单的例子.按照微积分学的一般习惯,这里也以 y 表示未知函数,而以 x 表示自变量.

例 5 求方程 $y''-xy=0$ 的通解.

解 设

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{4.71}$$

为方程的解,这里 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n,\cdots)$是待定常数,将它对 x 微分两次,有

$$y''=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+\cdots$$

将 y, y'' 的表达式代入方程,并比较 x 的同次幂的系数,得到

$$2\cdot 1a_2=0,\quad 3\cdot 2a_3-a_0=0,\quad 4\cdot 3a_4-a_1=0,$$
$$5\cdot 4a_5-a_2=0,\cdots$$

或一般地可推得

$$a_{3k}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3k-1)\cdot 3k},$$
$$a_{3k+1}=\frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3k\cdot(3k+1)},$$
$$a_{3k+2}=0,$$

其中 a_0, a_1 是任意的,因而

$$y=a_0\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3n-1)\cdot 3n}+\cdots\right]$$
$$+a_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot 3n\cdot(3n+1)}+\cdots\right].$$

这个幂级数的收敛半径是无限大的,因而级数的和(其中包括两个任意常数 a_0 及 a_1)便是所要求的通解.

例 6 求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足初值条件 $y(0)=0$ 及 $y'(0)=1$ 的解.

解 设级数(4.71)为方程的解.首先,利用初值条件,可以得到

$$a_0=0,\quad a_1=1,$$

因而

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$
$$y'=1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$
$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

将 y, y', y'' 的表达式代入原方程,合并 x 的各同次幂的项,并令各项系数等于零,得到

$$a_2=0, a_3=1, a_4=0, \cdots, a_n=\frac{2}{n-1}a_{n-2}, \cdots$$

因而

$$a_5=\frac{1}{2!}, \quad a_6=0, \quad a_7=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!}, \quad a_8=0, \quad a_9=\frac{1}{4!}, \cdots$$

最后得

$$a_{2k+1}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(k-1)!}=\frac{1}{k!}, \quad a_{2k}=0,$$

对一切正整数 k 成立.

将 $a_i(i=0,1,2,\cdots)$ 的值代回(4.71)就得到

$$\begin{aligned} y &= x+x^3+\frac{x^5}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{k!}+\cdots \\ &= x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}+\cdots\right)=xe^{x^2}, \end{aligned}$$

这就是方程的满足所给初值条件的解.

是否所有方程都能按以上方式求出其幂级数解？或者说究竟方程应该满足什么条件才能保证它的解可用幂级数来表示呢？级数的形式怎样？其收敛区间又如何？这些问题,在微分方程解析理论中有完满的解答,但因讨论时需要涉及解析函数等较专门的知识,在此我们仅叙述有关结果而不加证明,若要了解定理的证明过程,可参考有关书籍[13]

考虑二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.72}$$

及初值条件 $y(x_0)=y_0$ 及 $y'(x_0)=y_0'$ 的情况.

不失一般性,可设 $x_0=0$,否则,我们引进新变量 $t=x-x_0$,经此变换,方程的形状不变,但这时对应于 $x=x_0$ 的就是 $t_0=0$ 了.因此,今后我们总认为 $x_0=0$.

定理 10 若方程(4.72)中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能展成 x 的幂级数,且收敛区间为 $|x|<R$,则方程(4.72)有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{4.73}$$

的特解,也以$|x|<R$为级数的收敛区间.

在上两例中方程显然满足定理的条件,系数$-x$,$-2x$和-4可看作是在全数轴上收敛的幂级数,故方程的解也在全数轴上收敛.但有些方程,例如n阶**贝塞尔方程**

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0, \tag{4.74}$$

这里n为非负常数,不一定是正整数.在此$p(x)=\frac{1}{x}$,$q(x)=1-\frac{n^2}{x^2}$.显然它不满足定理10的条件,因而不能肯定有形如(4.73)的特解.但它满足下述定理11的条件,从而具有别种形状的幂级数解.

定理 11 若方程(4.72)中系数$p(x)$,$q(x)$具有这样的性质,即$xp(x)$和$x^2q(x)$均能展成x的幂级数,且收敛区间为$|x|<R$,若$a_0\neq0$,则方程(4.72)有形如

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\alpha+n} \tag{4.75}$$

的特解,α是一个待定的常数.级数(4.75)也以$|x|<R$为收敛区间.若$a_0=0$,或更一般地,$a_i=0(i=0,1,2,\cdots,m-1)$,但$a_m\neq0$,则引入记号$\beta=\alpha+m$,$b_k=a_{m+k}$,则

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=m}^{\infty}a_nx^n=x^{\alpha+m}\sum_{k=0}^{\infty}a_{m+k}x^k=x^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,$$

这里$b_0=a_m\neq0$,而β仍为待定常数.

例 7 求解n阶贝塞尔方程(4.74).

解 将方程改写成

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{x^2-n^2}{x^2}y=0,$$

易见,它满足定理 11 的条件,且 $xp(x)=1, x^2q(x)=x^2-n^2$,按 x 展成的幂级数收敛区间为 $-\infty<x<+\infty$,由定理 11,方程有形如

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k} \tag{4.75}$$

的解,这里 $a_0\neq0$,而 a_k 和 α 是待定常数.将(4.75)代入(4.74)中,得

$$\begin{aligned}x^2\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha+k)(\alpha+k-1)a_kx^{\alpha+k-2}&\\+x\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha+k)a_kx^{\alpha+k-1}&\\+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k}&=0,\end{aligned}$$

把 x 同幂次项归在一起,上式变为

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\alpha+k)(\alpha+k-1)+(\alpha+k)-n^2]a_kx^{\alpha+k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha+k+2}=0.$$

令各项的系数等于零,得一系列的代数方程

$$\begin{cases}a_0[\alpha^2-n^2]=0,\\a_1[(\alpha+1)^2-n^2]=0,\\a_k[(\alpha+k)^2-n^2]+a_{k-2}=0,\\\qquad k=2,3,\cdots\end{cases} \tag{4.76}$$

因为 $a_0\neq0$,故从(4.76)的第一个方程解得 α 的两个值

$$\alpha=n \text{ 和 } \alpha=-n.$$

先考虑 $\alpha=n$ 时方程(4.74)的一个特解.这时我们总可以从(4.76)中逐个地确定所有的系数 a_k.把 $\alpha=n$ 代入(4.76),得到

$$a_1 = 0,$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad k = 2,3,\cdots$$

或按下标为奇数或偶数,我们分别有

$$\begin{cases} a_{2k+1} = \dfrac{-a_{2k-1}}{(2k+1)(2n+2k+1)} \\ a_{2k} = \dfrac{-a_{2k-2}}{2k(2n+2k)}, \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots$$

从而求得

$$a_{2k-1} = 0, \qquad k = 1,2,\cdots$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(n+1)},$$

$$a_4 = (-1)^2 \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!\ (n+1)(n+2)},$$

$$a_6 = (-1)^3 \frac{a_0}{2^6 \cdot 3!\ (n+1)(n+2)(n+3)},$$

一般地

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} \cdot k!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \quad k = 1,2,\cdots$$

将各 a_k 代入(4.75)得到方程(4.74)的一个解

$$y_1 = a_0 x^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} \cdot k!\ (n+1)(n+2)\cdots(n+k)} x^{2k+n}. \tag{4.77}$$

既然是求(4.74)的特解,我们不妨令

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)},$$

其中函数 $\Gamma(s)$ 定义如下:

当 $s>0$ 时,$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$;当 $s<0$ 且非整数时,由递推公式 $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$ 定义.

$\Gamma(s)$具有性质

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s);\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad n\text{ 为正整数}.$$

而(4.77)变为

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ (n+k)\cdots(n+1)\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

注意到 Γ 函数的性质,即有

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\equiv \mathrm{J}_n(x),$$

$\mathrm{J}_n(x)$是由贝塞尔方程(4.74)定义的特殊函数,称为 **n 阶贝塞尔函数**.

因此,对于 n 阶贝塞尔方程,它总有一个特解 $\mathrm{J}_n(x)$. 为了求得另一个与 $\mathrm{J}_n(x)$线性无关的特解,我们自然想到,求 $\alpha=-n$ 时方程(4.74)的形如

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-n+k}$$

的解,我们注意到只要 n 不为非负整数,像以上对于 $\alpha=n$ 时的求解过程一样,我们总可以求得

$$a_{2k-1}=0,\quad k=1,2,\cdots$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}\cdot k!\ (-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)},\quad k=1,2,\cdots$$

使之满足(4.76)中的一系列方程,因而

$$y_2=a_0x^{-n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}\cdot k!\ (-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)}x^{2k-n}\tag{4.78}$$

是(4.74)的一个特解. 此时,若令

$$a_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)},$$

则(4.78)变为

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\equiv \mathrm{J}_{-n}(x),$$

$J_{-n}(x)$称为 $-n$ **阶贝塞尔函数**.

利用达朗贝尔判别法不难验证级数(4.77)和(4.78)对于任何 x 值(在(4.78)中 $x\neq 0$)都是收敛的,因此,当 n 不为非负整数时,$J_n(x)$和 $J_{-n}(x)$都是方程(4.74)的解,而且是线性无关的,因为它们可展为由 x 的不同幂次开始的级数,从而它们的比不可能是常数.于是方程(4.74)的通解可写为

$$y=c_1 J_n(x)+c_2 J_{-n}(x),$$

这里 c_1,c_2是任意常数.此情形的 $J_n(x)$和 $J_{-n}(x)$称为**第一类贝塞尔函数**.

当 n 为自然数时,虽然仍可由(4.76)求出 $a_{2k}(k=n+1,n+2,\cdots)$,a_{2n}任意,但容易验证,由此得到的 $J_{-n}(x)$与 $J_n(x)$线性相关,为了求出与 $J_n(x)$线性无关的另一个特解,要用其他方法,所求得的特解称为**第二类贝塞尔函数**,在此不作深入介绍.

例 8 求方程 $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{9}{25}\right)y=0$ 的通解.

解 引入新变量 $t=2x$,我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=2\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(2\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=4\frac{d^2y}{dt^2},$$

将上述关系式代入原方程,得到

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\frac{9}{25}\right)y=0, \tag{4.79}$$

这是 $n=\frac{3}{5}$的贝塞尔方程.由例 7 可知,方程(4.79)的通解可表为

$$y=c_1 J_{\frac{3}{5}}(t)+c_2 J_{-\frac{3}{5}}(t),$$

代回原来变量,就得到原方程的通解

$$y=c_1 J_{\frac{3}{5}}(2x)+c_2 J_{-\frac{3}{5}}(2x),$$

其中 c_1,c_2是任意常数.

4.3.3 第二宇宙速度计算

作为这一节的应用,我们计算发射人造卫星的最小速度,即所谓第二宇宙速度.在这个速度下,物体将摆脱地球的引力,像地球一样绕着太阳运行,成为人造行星.

让我们首先建立物体垂直上抛运动的微分方程.以 M 和 m 分别表示地球和物体的质量.按牛顿万有引力定律,作用于物体的引力 F(空气阻力忽略不计)为

$$F = k\frac{mM}{r^2}, \tag{4.80}$$

这里 r 表示地球的中心和物体重心之间的距离,k 为万有引力常数.因此,物体运动规律应满足下面微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{mM}{r^2},$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{M}{r^2}, \tag{4.81}$$

这里的负号表示物体的加速度是负的.

设地球半径为 R($R = 63\times 10^5$ m),物体发射速度为 V_0,因此,当物体刚刚离开地球表面时,我们有 $r = R$,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = V_0$,即应取初值条件为

$$当\ t = 0\ 时,r = R,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = V_0.$$

方程(4.81)不显含自变量 t,应用 4.3.1 讨论过的方法,即令 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = V$,把方程降阶成为一阶方程

$$V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -k\frac{M}{r^2},$$

解得

$$\frac{V^2}{2}=kM\frac{1}{r}+c.$$

注意到这时初值条件为 $r=R$ 时，$V=V_0$ 利用这些数据即可决定常数

$$c=\frac{V_0^2}{2}-\frac{kM}{R},$$

因而

$$\frac{V^2}{2}=\frac{kM}{r}+\left(\frac{V_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \tag{4.82}$$

因为物体运动速度必须始终保持是正的，即 $\frac{V^2}{2}>0$，而随着 r 的不断增大，量 $\frac{kM}{r}$ 变得任意小. 因此，由式(4.82)看到，条件 $\frac{V^2}{2}>0$ 要对所有的 r 都成立，只有不等式

$$\frac{V_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\geqslant 0,$$

或

$$V_0\geqslant\sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

成立. 因而最小的发射速度由下面式子决定：

$$V_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}. \tag{4.83}$$

在地球的表面，即 $r=R$ 时，重力加速度为 g($g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$)，由此根据(4.80)，就有 $g=k\frac{M}{R^2}$，于是 $kM=gR^2$. 以此代入(4.83)得到

$$V_0=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times 9.81\times 63\times 10^5}\approx 11.2\times 10^3\ \mathrm{m/s},$$

我们通常所说的第二宇宙速度指的就是 $V_0=11.2\ \mathrm{km/s}$ 这个速度.

习题 4.3

1. 求解下列方程：

(1) $x''=\dfrac{1}{2x'}\left(\text{这里 } x'=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},x''=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\text{以下同}\right)$;

(2) $xx''-(x')^2+(x')^3=0$;

(3) $x''+\dfrac{2}{1-x}(x')^2=0$;

(4) $x''+\sqrt{1-(x')^2}=0$;

(5) $ax''+[1+(x')^2]^{3/2}=0$(常数 $a\neq0$);

(6) $x''-\dfrac{1}{t}x'+(x')^2=0$(提示:方程两端除以 x').

2. 用幂级数解法求解下列方程:

(1) $x''+tx'+x=0,x(0)=0,x'(0)=1$;

(2) $(1-t)x''+x=0$;

(3) $x''-tx'-x=0$.

3. 求解贝塞尔方程

$$t^2x''+tx'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)x=0.$$

$\left(\text{提示}:\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\right)$

4. 一个物体在大气中降落,初速度为零,空气阻力与速度的平方成正比例,求该物体的运动规律.

5. 试证:对于二阶齐次线性微分方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

其中 $p(t),q(t)$为连续函数,

(1) 若 $p(t)\equiv-tq(t)$,则 $x=t$ 是方程的解;

(2) 若存在常数 m 使得$m^2+mp(t)+q(t)\equiv0$,则方程有解 $x=\mathrm{e}^{mt}$.

(3) 若 $x_1(t),x_2(t)$是方程的两个线性无关的解,则方程的系数 $p(t)$, $q(t)$由 $x_1(t),x_2(t)$唯一确定,且 $x_1(t),x_2(t)$没有共同的零点.

6. 求解方程 $tx''-2(1+t)x'+(2+t)x=0\quad(t\neq0)$.

7. 假设 $\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$是方程(4.58)的通解,而函数 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$是 $x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$的通解,试证 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$就是方程(4.57)的通解,这里 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k},\cdots,c_n$为任意常数.

本章学习要点

本章着重介绍了线性微分方程的基本理论和求解方法，主要结论可概括如下：

1．关于解的性质

线性微分方程的解的性质，主要是：(1) 齐次线性微分方程的解的叠加性；(2) 非齐次线性微分方程的解的叠加性；(3) n 阶齐次线性微分方程的所有解构成一个 n 维线性空间；(4) 基本解组的以任意常数为系数的线性组合构成齐次线性微分方程的通解；(5) 非齐次线性微分方程的通解可表为它的一个特解与对应齐次线性微分方程的通解之和；(6) 线性微分方程的通解包括了该方程的所有解．这些性质是线性微分方程所特有的．

2．关于求解的方法

关于线性微分方程的解法，我们主要介绍了五种较常用的方法，它们是：(1) 求常系数齐次线性微分方程的基本解组的特征根法(或欧拉待定指数函数法)；(2) 求常系数非齐次线性微分方程的特解的待定系数法和拉普拉斯变换法；(3) 求一般非齐次线性微分方程特解的常数变易法；(4) 求一般二阶齐次线性微分方程的幂级数解法．

特征根法的要点是把微分方程的求解问题化为代数方程的求根问题；拉普拉斯变换法则首先将线性微分方程转换成复变数的代数方程，再由拉普拉斯变换表或反变换公式求出微分方程的解；待定系数法用于方程右端 $f(t)$ 是某些基本函数的情况，常见的有：多项式、指数函数、正弦(或余弦)函数以及它们的某种乘积组合．待定系数法和特征根法的特点就在于不需通过积分运算，而只要解代数方程或加上微分运算即可求得微分方程的解．我们一定要记住常系数线性微分方程所固有的这种特性．

幂级数解法的思想和待定系数法有类似之处，所不同者，前者

待定的是级数的系数,因而通常计算量较大.其实幂级数解法适用二阶以上的高阶齐次线性微分方程与非齐次线性微分方程,也能求其特解或通解,特别是通过幂级数解法求解某些特殊方程而产生出某些特殊函数形式的解,例如,求解贝塞尔方程产生出贝塞尔函数;求解勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \quad (n \text{ 为常数})$$

而产生勒让德多项式等,它们都在现代物理中有非常重要的地位,这更体现了幂级数解法的重要意义和应用价值.希望深入学习和研究的读者可参阅有关书籍[13,14].

不同的方法用于不同类型的方程,这是应用时必须特别注意之点.

第五章

线性微分方程组

我们在第一章中可以看到在相当广泛的实际应用问题中，比较复杂的数学模型都将会导出多于一个微分方程的方程组，而且通过某些简化的假设和适当的变换，这种方程组又可化为一阶线性微分方程组.本章研究线性微分方程组的理论.类似于第四章所指出过的，在微分方程的理论中，线性微分方程组是非常值得重视的一部分内容.为了研究这些线性微分方程组，我们引进向量和矩阵的记号，并广泛利用线性代数(向量空间和矩阵代数)的结果.很多微分方程的理论只有借助于线性代数的知识才可以作出适当和充分的解释，希望读者能很好地领会这一章的内容.作为本章所得的每一个结果的特殊情形，都可以得到第四章已讨论过的高阶线性微分方程的一个相应结果.

§5.1 存在唯一性定理

5.1.1 记号和定义

我们考察形如

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

的一阶线性微分方程组,其中已知函数 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 和 $f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的,方程组(5.1)关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ 是线性的.

我们引进下面的记号.

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵,它的元是 n^2 个函数 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$.

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

这里 $\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'$ 是 $n\times 1$ 矩阵或 n 维列向量.有时为简便起见,我们也将 n 维列向量写为 n 维行向量的转置,如 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

注意,矩阵相加、矩阵相乘、矩阵与纯量相乘等等性质对于以函数作为元的矩阵同样成立.这样一来,方程组(5.1)可以写成下面的形式

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t). \tag{5.4}$$

我们引进下面的概念.

一个矩阵或者一个向量在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上称为**连续的**,如果它的每一个元都是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数.

一个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 或者一个 n 维列向量 $\boldsymbol{u}(t)$

$$\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_n(t)\end{bmatrix}$$

在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上称为**可微的**，如果它的每一个元都在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上可微.它们的导数分别由下式给出：

$$\boldsymbol{B}'(t)=\begin{bmatrix}b'_{11}(t) & b'_{12}(t) & \cdots & b'_{1n}(t)\\b'_{21}(t) & b'_{22}(t) & \cdots & b'_{2n}(t)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\b'_{n1}(t) & b'_{n2}(t) & \cdots & b'_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix}u'_1(t)\\u'_2(t)\\\vdots\\u'_n(t)\end{bmatrix}.$$

不难证明，如果 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$及 n 维向量 $\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{v}(t)$是可微的，那么下列等式成立：

(1) $[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$,

$[\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t)]'=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$;

(2) $[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)$;

(3) $[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$.

类似地，矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$或者向量 $\boldsymbol{u}(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上称为**可积的**，如果它的每一个元都在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上可积.它们的积分分别由下式给出：

$$\int_a^b\boldsymbol{B}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\int_a^b b_{11}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b b_{12}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b b_{1n}(t)\mathrm{d}t\\\int_a^b b_{21}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b b_{22}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b b_{2n}(t)\mathrm{d}t\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\int_a^b b_{n1}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b b_{n2}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b b_{nn}(t)\mathrm{d}t\end{bmatrix},$$

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \int_a^b u_1(t)\mathrm{d}t \\ \int_a^b u_2(t)\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix}.$$

现在我们给出(5.4)的解的定义.

定义 1 设 $\boldsymbol{A}(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{f}(t)$是同一区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 n 维向量.方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{5.4}$$

在某区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$(这里$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$)的解就是向量 $\boldsymbol{u}(t)$,它的导数 $\boldsymbol{u}'(t)$在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上连续且满足

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

现在考虑带有初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的方程组(5.4),这里 t_0是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知数,$\boldsymbol{\eta}$ 是 n 维已知向量,在这样条件下求解方程组称为**初值问题**.

定义 2 初值问题

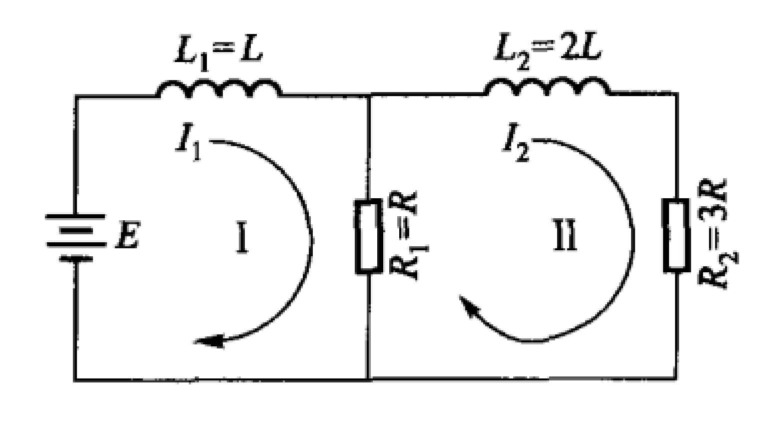
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \tag{5.5}$$

的解就是方程组(5.4)在包含 t_0的区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的解 $\boldsymbol{u}(t)$,使得 $\boldsymbol{u}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

例 1 试列出图(5.1)中经过 L_1及 L_2的电流 I_1及 I_2应满足的微分方程.

解 对回路Ⅰ及回路Ⅱ应用基尔霍夫第二定律(参看第一章§1.1 例 1),得到下列方程组:

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + R(I_1 - I_2) = E, \\ 2L\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + 3RI_2 + R(I_2 - I_1) = 0, \end{cases}$$



图(5.1)

即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R}{L}I_1 + \dfrac{R}{L}I_2 + \dfrac{E}{L}, \\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{R}{2L}I_1 - \dfrac{2R}{L}I_2. \end{cases}$$

这是一个含有两个未知数 I_1 和 I_2 的一阶线性微分方程组,为了求得电流 I_1 和 I_2 就应该求解这个微分方程组.

如果令

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & \dfrac{R}{L} \\ \dfrac{R}{2L} & -\dfrac{2R}{L} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix},$$

那么上面方程组就可以写成(5.4)的形式 $\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{f}$.

例 2 验证向量

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

是初值问题

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

在区间 $-\infty < t < +\infty$ 上的解.

解 显然

$$u(0)=\begin{bmatrix} e^0 \\ -e^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

因为 e^{-t} 和 $-e^{-t}$ 处处有连续导数,我们得到

$$u'(t)=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}u(t),$$

因此 $u(t)$ 是给定初值问题的解.

正如在第二章所看到的,当 $n=1$ 时,我们可以得到初值问题(5.5)的解的明显表达式,当 $n\geqslant 2$ 时,情况就复杂多了.

在第四章中,我们讨论了带有初值条件的 n 阶线性微分方程的问题.现在进一步指出,可以通过下面的方法,将 n 阶线性微分方程的初值问题化为形如(5.5)的线性微分方程组的初值问题.

考虑 n 阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t), \\ x(t_0)=\eta_1, x'(t_0)=\eta_2,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n, \end{cases} \tag{5.6}$$

其中 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),f(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知连续函数,$t_0\in[a,b]$,$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是已知常数.我们指出,它可以化为下列线性微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases} x'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \\ x(t_0)=\eta, \end{cases} \tag{5.7}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{bmatrix}.$$

事实上,令

$$x_1=x,x_2=x',x_3=x'',\cdots,x_n=x^{(n-1)},$$

这时

$$x_1'=x'=x_2,x_2'=x''=x_3,\cdots,x_{n-1}'=x^{(n-1)}=x_n,$$

$$x_n'=x^{(n)}=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n+f(t),$$

而且

$$x_1(t_0)=x(t_0)=\eta_1,\quad x_2(t_0)=x'(t_0)=\eta_2,\cdots,$$

$$x_n(t_0)=x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n.$$

现在假设 $\psi(t)$是在包含 t_0的区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上(5.6)的任一解.由此,我们得知 $\psi(t),\psi'(t),\cdots,\psi^{(n)}(t)$在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上存在、连续、满足方程(5.6)且 $\psi(t_0)=\eta_1,\psi'(t_0)=\eta_2,\cdots,\psi^{(n-1)}(t_0)=\eta_n$.令

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\\varphi_2(t)\\\vdots\\\varphi_n(t)\end{bmatrix},$$

其中 $\varphi_1(t)=\psi(t),\varphi_2(t)=\psi'(t),\cdots,\varphi_n(t)=\psi^{(n-1)}(t)(a\leqslant t\leqslant b)$.那么,显然有 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.此外,我们还得到

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1'(t)\\\varphi_2'(t)\\\vdots\\\varphi_{n-1}'(t)\\\varphi_n'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi'(t)\\\psi''(t)\\\vdots\\\psi^{(n-1)}(t)\\\psi^{(n)}(t)\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \\ -a_1(t)\psi^{(n-1)}(t) - \cdots - a_n(t)\psi(t) + f(t) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \\ -a_n(t)\varphi_1(t) - \cdots - a_1(t)\varphi_n(t) + f(t) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix},
$$

这就表示这个特定的向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(5.7)的解.反之,假设向量 $\boldsymbol{u}(t)$是在包含 t_0的区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上(5.7)的解,令

$$
\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix},
$$

并定义函数 $w(t)=u_1(t)$，由(5.7)的第一个方程，我们得到 $w'(t)=u_1'(t)=u_2(t)$，由第二个方程得到 $w''(t)=u_2'(t)=u_3(t)$，…，由第 $n-1$ 个方程得到 $w^{(n-1)}(t)=u_{n-1}'(t)=u_n(t)$，由第 n 个方程得到

$$\begin{aligned}
w^{(n)}(t)&=u_n'(t)\\
&=-a_n(t)u_1(t)-a_{n-1}(t)u_2(t)-\cdots\\
&\quad-a_2(t)u_{n-1}(t)-a_1(t)u_n(t)+f(t)\\
&=-a_1(t)w^{(n-1)}(t)-a_2(t)w^{(n-2)}(t)-\cdots\\
&\quad-a_n(t)w(t)+f(t),
\end{aligned}$$

由此即得

$$\begin{aligned}
w^{(n)}(t)+a_1(t)w^{(n-1)}(t)+a_2(t)w^{(n-2)}(t)&\\
+\cdots+a_n(t)w(t)=f(t).&
\end{aligned}$$

同时，我们也得到

$$w(t_0)=u_1(t_0)=\eta_1,\cdots,w^{(n-1)}(t_0)=u_n(t_0)=\eta_n,$$

这就是说，$w(t)$是(5.6)的一个解.

总之，由上面的讨论，我们已经证明了初值问题(5.6)与(5.7)在下面的意义下是**等价的**：给定其中一个初值问题的解，我们可以构造另一个初值问题的解.

值得指出的是：每一个 n 阶线性微分方程可化为 n 个一阶线性微分方程构成的方程组，反之却不成立. 例如方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

不能化为一个二阶微分方程.

*5.1.2 存在唯一性定理

本节我们研究初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}\tag{5.5}$$

的解的存在唯一性定理. 类似于第三章，我们通过五个小命题，

采用逐步逼近法来证明定理.因为现在讨论的是方程组(写成向量的形式),所以有些地方稍微复杂些,而且要引进向量、矩阵的“范数”及向量函数序列的收敛性等概念;然而由于方程是线性的,所以有些地方又显得简单些,而且结论也加强了.总之,我们要比较第三章中的证明和现在的证明的异同,从对比中加深对问题的理解.

对于 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,我们定义它的**范数**为

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|,\quad \|\boldsymbol{x}\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 n 维向量,这时容易验证下面两个性质:

1° $\|\boldsymbol{AB}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$,

$\|\boldsymbol{Ax}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$;

2° $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$,

$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

向量序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$,$\boldsymbol{x}_k=(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk})^{\mathrm{T}}$ 称为**收敛的**,如果对每一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$,数列 $\{x_{ik}\}$ 都是收敛的.

向量函数序列 $\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$,$\boldsymbol{x}_k(t)=(x_{1k}(t),x_{2k}(t),\cdots,x_{nk}(t))^{\mathrm{T}}$ 称为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上**收敛的(一致收敛的)**,如果对于每一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$,函数序列 $\{x_{ik}(t)\}$ 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是收敛的(一致收敛的).易知,区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续向量函数序列 $\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$ 的一致收敛极限向量函数仍是连续的.

向量函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_k(t)$ 称为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是**收敛的(一致收敛的)**,如果其部分和作成的向量函数序列在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是收敛的(一致收敛的).

判别通常的函数级数的一致收敛性的魏氏判别法对于向量函数级数也是成立的,这就是说,如果

$$\| \boldsymbol{x}_k(t) \| \leqslant M_k, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 是收敛的，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的.

积分号下取极限的定理对于向量函数也成立，这就是说，如果连续向量函数序列 $\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$ 在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的，则

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b \boldsymbol{x}_k(t) \mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}_k(t) \mathrm{d}t.$$

注意，以上谈到的是向量序列的有关定义和结果，对于一般矩阵序列，可以得到类似的定义和结果.

例如，$n \times n$ 矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}_k\}$，其中 $\boldsymbol{A}_k = [a_{ij}^{(k)}]_{n \times n}$，称为**收敛的**，如果对于一切 $i, j = 1, 2, \cdots, n$，数列 $\{a_{ij}^{(k)}\}$ 都是收敛的.

无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

称为**收敛的**，如果它的部分和所成序列是收敛的.

如果对于每一个整数 k，

$$\| \boldsymbol{A}_k \| \leqslant M_k,$$

而数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 是收敛的，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ 也是收敛的.

同样，可以给出无穷矩阵函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k(t)$ 的一致收敛性的定义和有关结果.

关于矩阵序列的有关定义和结果，我们在 5.3.1 中将会用到.

总之，上述一切都是数学分析有关概念和结果的自然推广，证明也和数学分析相类似.读者可以作为练习详细推演一下.

现在讨论存在唯一性定理.

定理 1（存在唯一性定理） 如果 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$ 是 n 维列向量，它们都在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续，则对于区间 $a \leqslant t \leqslant$

b 上的任何数 t_0 及任一常数 n 维列向量 $\boldsymbol{\eta}$,方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{5.4}$$

存在唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$,定义于整个区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上,且满足初值条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta}.$$

类似于第三章,我们分成五个小命题来证明.

命题 1 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是方程组(5.4)的定义于区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s, \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{5.8}$$

的定义于 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续解.反之亦然.

证明完全类似于第三章,兹不赘述.

现在取 $\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \boldsymbol{\eta}$,构造皮卡逐步逼近向量函数序列如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_0(t) = \boldsymbol{\eta}, & \\ & a \leqslant t \leqslant b \\ \boldsymbol{\varphi}_k(t) = \boldsymbol{\eta} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s) + \boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s & (k = 1,2,\cdots). \end{cases} \tag{5.9}$$

向量函数 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$称为(5.4)的**第 k 次近似解**.应用数学归纳法立刻推得命题 2.

命题 2 对于所有的正整数 k,向量函数 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$在区间 $a \leqslant t \leqslant b$上有定义且连续.

命题 3 向量函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的.

证明 考虑向量函数级数

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} [\boldsymbol{\varphi}_j(t) - \boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)], \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{5.10}$$

由于级数(5.10)的部分和为

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) + \sum_{j=1}^{k} [\boldsymbol{\varphi}_j(t) - \boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)] = \boldsymbol{\varphi}_k(t),$$

因此,要证明序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛,只须证明级数(5.10)在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛就够了.因为 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\boldsymbol{f}(t)$都在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续,所以 $\|\boldsymbol{A}(t)\|$ 和 $\|\boldsymbol{f}(t)\|$ 都在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有界.设 L 和 K 是大于零的常数,使得

$$\|\boldsymbol{A}(t)\|\leqslant L,\ \|\boldsymbol{f}(t)\|\leqslant K,\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

并取 $M=L\|\boldsymbol{\eta}\|+K$.下面我们只证明序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在区间 $t_0\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛,在区间 $a\leqslant t\leqslant t_0$上一致收敛可以类似地加以证明.为此,我们进行如下的估计,由(5.9)有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)\| &\leqslant\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_0(s)+\boldsymbol{f}(s)\|\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant\int_{t_0}^{t}[\|\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_0(s)\|+\|\boldsymbol{f}(s)\|]\mathrm{d}s\\ &\leqslant\int_{t_0}^{t}[L\|\boldsymbol{\eta}\|+K]\mathrm{d}s=M(t-t_0),\quad(5.11)\end{aligned}$$

及

$$\|\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{A}(s)[\boldsymbol{\varphi}_1(s)-\boldsymbol{\varphi}_0(s)]\|\,\mathrm{d}s,$$

利用(5.11)得到

$$\|\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)\|\leqslant L\int_{t_0}^{t}M(s-t_0)\mathrm{d}s=\frac{ML}{2!}(t-t_0)^2.$$

现设

$$\|\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)\|\leqslant\frac{ML^{j-1}}{j!}(t-t_0)^j$$

成立,则由(5.9)当 $t_0\leqslant t\leqslant b$ 时,有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_{j+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_j(t)\| &\leqslant\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{A}(s)[\boldsymbol{\varphi}_j(s)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(s)]\|\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant L\int_{t_0}^{t}\frac{ML^{j-1}}{j!}(s-t_0)^j\mathrm{d}s\\ &=\frac{ML^j}{(j+1)!}(t-t_0)^{j+1}.\end{aligned}$$

于是,由数学归纳法得到,对于所有的正整数 k,有如下的估计:

$$\| \boldsymbol{\varphi}_k(t) - \boldsymbol{\varphi}_{k-1}(t) \| \leqslant \frac{ML^{k-1}}{k!}(t-t_0)^k, \quad t_0 \leqslant t \leqslant b, \tag{5.12}$$

由此可知,当 $t_0 \leqslant t \leqslant b$ 时,

$$\| \boldsymbol{\varphi}_k(t) - \boldsymbol{\varphi}_{k-1}(t) \| \leqslant \frac{ML^{k-1}}{k!}(b-t_0)^k. \tag{5.13}$$

但是,(5.13)的右端是正项收敛级数

$$\frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k(b-t_0)^k}{k!}$$

的一般项,故由向量函数级数一致收敛的魏氏判别法,级数(5.10)在 $t_0 \leqslant t \leqslant b$ 上一致收敛,因而向量函数序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$ 也在 $t_0 \leqslant t \leqslant b$ 上一致收敛.命题 3 证毕.

现设

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t) = \boldsymbol{\varphi}(t),$$

因为 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$ 的一致收敛极限函数,所以 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 也在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续.

命题 4 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程(5.8)的定义在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续解.

证明 由 $\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{\varphi}(t)$,以及 $\mathbf{A}(t)$ 的连续性,推知序列 $\{\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_k(s)\}$ 在区间 $a \leqslant s \leqslant b$ 上一致收敛于 $\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s)$.

对于(5.9)两边取极限得到

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t) &= \boldsymbol{\eta} + \lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}[\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s) + \boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t}[\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s) + \boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t}[\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s) + \boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s,$$

这就是说,$\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程(5.8)的定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续解. 命题 4 证毕.

命题 5 设 $\boldsymbol{\psi}(t)$是积分方程(5.8)的定义于 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的另一个连续解,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\psi}(t)(a\leqslant t\leqslant b)$.

证明 我们首先证明 $\boldsymbol{\psi}(t)$也是序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的一致收敛极限函数. 根据(5.9)及

$$\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\psi}(s)+\boldsymbol{f}(s)]\mathrm{d}s,$$

像命题 3 进行的估计一样,可以得到下面的估计式

$$\|\boldsymbol{\varphi}_k(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|\leqslant\frac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1},\quad t_0\leqslant t\leqslant b,$$

因此,在 $t_0\leqslant t\leqslant b$ 上,有

$$\|\boldsymbol{\varphi}_k(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|\leqslant\frac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1}.$$

我们知道,以$\dfrac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1}$为公项的级数是收敛的,故当 $k\to\infty$时,$\dfrac{\widetilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-t_0)^{k+1}\longrightarrow 0$,因而 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$在 $t_0\leqslant t\leqslant b$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{\psi}(t)$. 根据极限的唯一性,即得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\psi}(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant b.$$

对于 $a\leqslant t\leqslant t_0$,可以类似地证明. 命题 5 证毕.

综合命题 1~5,即得到存在唯一性定理的证明.

值得指出的是,关于线性微分方程组的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$的定义区间是系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$和非齐次项 $\boldsymbol{f}(t)$在其上连续的整个区间 $a\leqslant t\leqslant b$. 在构造逐步逼近函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$时,$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$的定义区间已经是整个 $a\leqslant t\leqslant b$,不像第三章对于一般方程那样,解只存在于 t_0 的某个邻域,然后经过延拓才能使解定义在较大的区间.

注意到 5.1.1 中关于 n 阶线性微分方程的初值问题(5.6)与线性微分方程组的初值问题(5.7)的等价性的论述,立即由本节的存在唯一性定理可以推得关于 n 阶线性微分方程的解的存在唯

一性定理(即第四章的定理 1).

推论 如果 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t)$ 都是区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续函数,则对于区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的任一数 t_0 及任意的 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$,方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

存在唯一解 $w(t)$,定义于整个区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上,且满足初值条件

$$w(t_0) = \eta_1, w'(t_0) = \eta_2, \cdots, w^{(n-1)}(t_0) = \eta_n.$$

习题 5.1

1. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

(1) 试验证 $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ 分别是方程组 $(*)$ 的满足初值条件 $\boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解;

(2) 试验证 $\boldsymbol{w}(t) = c_1\boldsymbol{u}(t) + c_2\boldsymbol{v}(t)$ 是方程组 $(*)$ 的满足初值条件 $\boldsymbol{w}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 的解,其中 c_1, c_2 是任意常数.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题:

(1) $x'' + 2x' + 7tx = \mathrm{e}^{-t}, x(1) = 7, x'(1) = -2$;

(2) $x^{(4)} + x = t\mathrm{e}^t, x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 2, x'''(0) = 0$;

(3) $\begin{cases} x'' + 5y' - 7x + 6y = \mathrm{e}^t, \\ y'' - 2y + 13y' - 15x = \cos t, \end{cases}$

$$x(0) = 1, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(提示:令 $w_1 = x, w_2 = x', w_3 = y, w_4 = y'$.)

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x},$$

满足初值条件

$$x(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

的第三次近似解.

§ 5.2　线性微分方程组的一般理论

现在讨论线性微分方程组

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{5.14}$$

的一般理论,主要是研究它的解的结构问题.

如果 $f(t)\neq 0$,则(5.14)称为**非齐次线性的**.

如果 $f(t)=0$,则方程的形式为

$$x' = A(t)x \tag{5.15}$$

(5.15)称为**齐次线性的**.通常(5.15)称为**对应于(5.14)的齐次线性微分方程组**.

5.2.1　齐次线性微分方程组

本段主要研究齐次线性微分方程组(5.15)的所有解的集合的代数结构问题.我们假设矩阵 $A(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的.

设 $u(t)$和 $v(t)$是(5.15)的任意两个解,α 和 β 是两个任意常数.根据向量函数的微分法则,即知 $\alpha u(t)+\beta v(t)$也是(5.15)的解,由此得到齐次线性微分方程组的叠加原理.

定理 2(叠加原理)　如果 $u(t)$和 $v(t)$是(5.15)的解,则它们的线性组合 $\alpha u(t)+\beta v(t)$也是(5.15)的解,这里 α,β 是任意常数.

定理 2 说明,(5.15)的所有解的集合构成一个线性空间.自然要问:此空间的维数是多少呢? 为此,我们引进向量函数 $x_1(t)$, $x_2(t),\cdots,x_m(t)$线性相关与线性无关的概念.

我们称定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的向量函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots$, $x_m(t)$是**线性相关**的,如果存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$,使得等式

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m(t)=\boldsymbol{0},\quad a\leqslant t\leqslant b$$

成立;否则,称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$为**线性无关的**.

例如,对于任一整数 $k>0$,下面的 $k+1$ 个向量函数(n 维向量)

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}t\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}t^2\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad\begin{bmatrix}t^k\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

在任何区间上都是线性无关的,而向量函数$(\cos^2 t,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$和$(\sin^2 t-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$在任何区间上都是线性相关的.

设有 n 个定义在区间$a\leqslant t\leqslant b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\\\vdots\\x_{n2}(t)\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

由这 n 个向量函数构成的行列式

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{W}[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]\\&=\boldsymbol{W}(t)=\begin{vmatrix}x_{11}(t)&x_{12}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\x_{21}(t)&x_{22}(t)&\cdots&x_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}(t)&x_{n2}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}\end{aligned}$$

称为这些向量函数的**朗斯基行列式**.

定理 3 如果向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$在区间$a\leqslant t\leqslant b$上线性相关,则它们的朗斯基行列式 $\boldsymbol{W}(t)=0$ $(a\leqslant t\leqslant b)$.

证明 由假设可知,存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)=\boldsymbol{0},\quad a\leqslant t\leqslant b,\tag{5.16}$$

把(5.16)看成是以 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为未知量的齐次线性代数方程组,这方程组的系数行列式就是 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式 $W(t)$. 由齐次线性代数方程组的理论知道,要此方程组有非零解,则它的系数行列式应为零,即 $W(t)\equiv 0(a\leqslant t\leqslant b)$. 定理证毕.

定理 4 如果(5.15)的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关,那么,它们的朗斯基行列式 $W(t)\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$.

证明 我们采用反证法. 设有某一个 $t_0(a\leqslant t_0\leqslant b)$,使得 $W(t_0)=0$. 考虑下面的齐次线性代数方程组:

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{0}, \tag{5.17}$$

它的系数行列式就是 $W(t_0)$,因为 $W(t_0)=0$,所以(5.17)有非零解 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$. 以这个非零解 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$ 构成向量函数

$$\boldsymbol{x}(t)=\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t), \tag{5.18}$$

根据定理 2,易知 $\boldsymbol{x}(t)$ 是(5.15)的解. 注意到(5.17),知道这个解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足初值条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0}, \tag{5.19}$$

但是,在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上恒等于零的向量函数 $\boldsymbol{0}$ 也是(5.15)的满足初值条件(5.19)的解. 由解的唯一性,知道 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$,即

$$\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)=\boldsymbol{0},\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

因为 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$ 不全为零,这就与 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关的假设矛盾. 定理得证.

由定理 3、定理 4 可以知道,由(5.15)的 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 作成的朗斯基行列式 $W(t)$ 或者恒等于零,或者恒不等于零.

定理 5 齐次线性微分方程组(5.15)一定存在 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$.

证明 任取 $t_0\in[a,b]$,根据解的存在唯一性定理,(5.15)分别满足初值条件

$$\boldsymbol{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$一定存在.又因为这 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$的朗斯基行列式 $W(t_0)=1\neq0$,故根据定理 3, $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是线性无关的.定理证毕.

定理 6 如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是(5.15)的 n 个线性无关的解,则(5.15)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$均可表为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t),$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_n$是相应的确定常数.

证明 任取 $t_0\in[a,b]$,令

$$\boldsymbol{x}(t_0)=c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0),\tag{5.20}$$

把(5.20)看作是以 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为未知量的线性代数方程组.这方程组的系数行列式就是 $W(t_0)$.因为 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是线性无关的,根据定理 4 知道 $W(t_0)\neq0$.由线性代数方程组的理论,方程组(5.20)有唯一解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$.以这组确定了的 c_1, $c_2,\cdots,c_n$ 构成向量函数 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$,那么,根据叠加原理,它是(5.15)的解.注意到(5.20),可知(5.15)的两个解 $\boldsymbol{x}(t)$及 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$具有相同的初值条件.由解的唯一性,得到

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t).$$

定理证毕.

推论 1 (5.15)的线性无关解的最大个数等于 n.

推论 2 如果已知(5.15)的 k 个线性无关解,则(5.15)可以降低为含 $n-k$ 个未知函数的线性微分方程组.特别地,如果已知(5.15)的 $n-1$ 个线性无关解,则(5.15)的通解即可得到.

我们称(5.15)的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 为(5.15)的一个**基本解组**.显然,(5.15)具有无穷多个不同的基本解组.

由定理 5 和定理 6,我们知道(5.15)的解空间的维数是 n,这样就回答了前面提出的问题.本段的主要结果可以用线性代数的语言简单地表述为:(5.15)所有解的集合构成一个 n 维线性空间.

注意到 5.1.1 关于 n 阶线性微分方程的初值问题(5.6)与线性微分方程组的初值问题(5.7)的等价性的论述,本节的所有定理都可以平行地推论到 n 阶线性微分方程上去.

从本节的定理 2 容易推得第四章的定理 2.参看 4.1.2 中关于纯量函数组的线性相关概念,我们可以证明:一组 $n-1$ 次可微的纯量函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$线性相关的充要条件是向量函数

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_m'(t) \\ \vdots \\ x_m^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

线性相关.事实上,如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$线性相关,则存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0.$$

将上式对 t 微分一次、二次、…、$n-1$ 次,得到

$$c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_mx_m'(t)=0,$$
$$c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_mx_m''(t)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_mx_m^{(n-1)}(t)=0,$$

即有

$$c_1\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_1'(t)\\\vdots\\x_1^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}x_2(t)\\x_2'(t)\\\vdots\\x_2^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}+\cdots+c_m\begin{bmatrix}x_m(t)\\x_m'(t)\\\vdots\\x_m^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}=\mathbf{0},\tag{**}$$

这就是说,向量函数组(*)是线性相关的.反之,如果向量函数(*)线性相关,则存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得(**)成立,当然有 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0$,这就表明 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 线性相关.

这样一来,再参看 4.1.2 中关于纯量函数朗斯基行列式的概念,从本节的定理 3、定理 4 和定理 5 立即分别推得第四章的定理 3、定理 4 和定理 5.

从本节的定理 6 直接得到

推论 3 如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是 n 阶微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0\tag{5.21}$$

的 n 个线性无关解,其中 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数,则(5.21)的任一解 $x(t)$ 均可表为

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t),$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是相应的确定常数.

如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是(5.21)的 n 个线性无关解(依 4.1.2 的有关定义,它们构成方程的基本解组),根据 n 阶微分方程通解的概念及 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$,函数

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

就是(5.21)的通解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数.从推论 3 知道,它包括了(5.21)的所有解.推论 3 可以看成是第四章定理 6 的另一种表述形式.

现在,我们将本节的定理写成矩阵的形式.这种不同的表述方法今后会有用的.如果一个 $n\times n$ 矩阵的每一列都是(5.15)的解,我

们称这个矩阵为(5.15)的**解矩阵**.它的列在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是线性无关的解矩阵称为在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上(5.15)的**基解矩阵**.我们用 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示由(5.15)的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 作为列构成的基解矩阵.当 $\boldsymbol{\Phi}(t_0)=\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵)时称其为标准基解矩阵.定理 5 和定理 6 即可以表述为如下的定理 1*.

定理 1* (5.15)一定存在一个基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.如果 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.15)的任一解,那么

$$\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}, \tag{5.22}$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是确定的 n 维常数列向量.

从上面的讨论中,我们可以看到,为了寻求(5.15)的任一解,需要寻求一个基解矩阵.这样,自然会提出下面的问题:如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上找到(5.15)的一个解矩阵,能否以某种简单的方式验证这个解矩阵是不是基解矩阵呢? 定理 3 和定理 4 完全回答了这个问题,它可以表述为下面的形式:

定理 2* (5.15)的一个解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵的充要条件是 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0\ (a\leqslant t\leqslant b)$;而且,如果对某一个 $t_0\in[a,b]$, $\det\boldsymbol{\Phi}(t_0)\neq 0$,则 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)\neq 0\ (a\leqslant t\leqslant b)$.($\det\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的行列式.)

要注意,行列式恒等于零的矩阵的列向量未必是线性相关的.例如,矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的行列式于任何区间上恒等于零,但它的列向量却是线性无关的.由定理 2* 即知,这个矩阵不可能是任一个齐次线性微分方程组的解矩阵.

例 1 验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

是方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

的基解矩阵.

解 首先,我们证明 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是解矩阵.令 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$表示 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的第一列,这时

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1(t),$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$是一个解.同样,如果以 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$表示 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的第二列,我们有

$$\boldsymbol{\varphi}_2'(t) = \begin{bmatrix} (t+1)e^t \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_2(t),$$

这表示 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$也是一个解.因此,$\boldsymbol{\Phi}(t) = [\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t)]$是解矩阵.

其次,根据定理 2*,因为 $\det \boldsymbol{\Phi}(t) = e^{2t} \neq 0$,所以 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是基解矩阵.

从定理 1* 和定理 2* 可以得到下面的推论.

推论 1* 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.15)在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的基解矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是非奇异 $n \times n$ 常数矩阵,那么,$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 也是(5.15)在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的基解矩阵.

证明 首先,根据解矩阵的定义易知,方程(5.15)的任一解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)$必满足关系

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

反之亦然.现令

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

微分上式,并注意到 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为方程的基解矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为常数矩阵,得到

$$\boldsymbol{\Psi}'(t) = \boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t),$$

即 $\boldsymbol{\Psi}(t)$是(5.15)的解矩阵. 又由 $\boldsymbol{C}$ 的非奇异性,我们有

$$\det \boldsymbol{\Psi}(t)=\det \boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\det \boldsymbol{C}\neq 0,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

因此由定理 2* 知,$\boldsymbol{\Psi}(t)$即 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 是(5.15)的基解矩阵.

推论 2* 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t),\boldsymbol{\Psi}(t)$在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的两个基解矩阵,那么,存在一个非奇异 $n\times n$ 常数矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$.

证明 因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为基解矩阵,故其逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$一定存在. 现令

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{X}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

或

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

易知 $\boldsymbol{X}(t)$是 $n\times n$ 可微矩阵,且 $\det\boldsymbol{X}(t)\neq 0\quad(a\leqslant t\leqslant b)$,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Psi}'(t)&=\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.\end{aligned}$$

由此推知 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{0}$,或 $\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{0}(a\leqslant t\leqslant b)$,即 $\boldsymbol{X}(t)$为常数矩阵,记为 $\boldsymbol{C}$. 因此我们有

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C},\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$为非奇异的 $n\times n$ 常数矩阵. 推论 2* 得证.

5.2.2 非齐次线性微分方程组

本段讨论非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)\tag{5.14}$$

的解的结构问题,这里 $\boldsymbol{A}(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知 $n\times n$ 连续矩阵,$\boldsymbol{f}(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的已知 n 维连续列向量. 向量 $\boldsymbol{f}(t)$通常称为强迫项,因为如果(5.14)描述一个力学系统,$\boldsymbol{f}(t)$就代表外力.

我们容易验证(5.14)的两个简单性质

性质 1 如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是(5.14)的解,$\boldsymbol{\psi}(t)$是(5.14)对应的齐次线性微分方程组(5.15)的解.则 $\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)$是(5.14)的解.

性质 2 如果$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$和$\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是(5.14)的两个解,则$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是(5.15)的解.

下面的定理 7 给出(5.14)的解的结构.

定理 7 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.15)的基解矩阵,$\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是(5.14)的某一解,则(5.14)的任一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$都可表为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t), \tag{5.23}$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是确定的常数列向量.

证明 由性质 2 我们知道 $\boldsymbol{\varphi}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是(5.15)的解.再由5.2.1 的定理 1*,得到

$$\boldsymbol{\varphi}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c},$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是确定的常数列向量,由此即得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t).$$

定理证毕.

定理 7 告诉我们,为了寻求(5.14)的任一解,只要知道(5.14)的一个解和它对应的齐次线性微分方程组(5.15)的基解矩阵.现在,我们还要进一步指出,在已经知道(5.15)的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的情况下,有一个寻求(5.14)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$的简单的方法.这个方法就是**常数变易法**.

从上一节我们知道,如果 $\boldsymbol{c}$ 是常数列向量,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$是(5.15)的解,它不可能是(5.14)的解.因此,我们将 $\boldsymbol{c}$ 变易为 t 的向量函数,而试图寻求(5.14)的形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t) \tag{5.24}$$

的解,这里 $\boldsymbol{c}(t)$是待定的向量函数.

假设(5.14)存在形如(5.24)的解.这时,将(5.24)代入(5.14)得到

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t).$$

因为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.15)的基解矩阵,所以 $\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$,由此上式

中含有 $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$的项消去了.因而 $\boldsymbol{c}(t)$必须满足关系式

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t). \tag{5.25}$$

因为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是非奇异的,所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$存在.用 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$左乘(5.25)两边,然后积分之,得到

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[a,b],$$

其中 $\boldsymbol{c}(t_0)=\boldsymbol{0}$.这样,(5.24)变为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[a,b]. \tag{5.26}$$

因此,如果(5.14)有一个形如(5.24)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$,则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$由公式(5.26)决定.

反之,用公式(5.26)决定的向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$必定是(5.14)的解.事实上,微分(5.26)得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}'(t)&=\boldsymbol{\Phi}'(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s+\boldsymbol{f}(t),\end{aligned}$$

再利用公式(5.26),即得

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t).$$

显然,还有 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$,这样一来,我们就得到了下面的定理 8.

定理 8 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.15)的基解矩阵,则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

是(5.14)的解,且满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$.

由定理 7 和定理 8 容易看出,(5.14)的满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$由下面公式给出:

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s, \tag{5.27}$$

这里 $\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}$ 是(5.15)的满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}_h(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解.公式(5.26)或公式(5.27)称为非齐次线性微分方程组(5.14)的**常数变易公式**.

例 2 试求初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}e^{-t}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

的解.

解 在例 1 中我们已经知道

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}$$

是对应的齐次线性微分方程组的基解矩阵.取矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$的逆,我们得到

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{\begin{bmatrix}e^{s} & -se^{s}\\0 & e^{s}\end{bmatrix}}{e^{2s}}=\begin{bmatrix}1 & -s\\0 & 1\end{bmatrix}e^{-s}.$$

这样,由定理 8,满足初值条件 $\boldsymbol{\psi}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$的解就是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(t)&=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}\int_0^t e^{-s}\begin{bmatrix}1 & -s\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\0\end{bmatrix}ds\\&=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-2s}\\0\end{bmatrix}ds\\&=\begin{bmatrix}e^{t} & te^{t}\\0 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$,对应的齐次线性微分方程组满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}_h(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$的解就是

$$\boldsymbol{\varphi}_h(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(t-1)e^{t}\\e^{t}\end{bmatrix}.$$

由公式(5.27),所求解就是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}_h(t)+\boldsymbol{\psi}(t)=\begin{bmatrix}(t-1)\mathrm{e}^t\\ \mathrm{e}^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t\mathrm{e}^t-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\\ \mathrm{e}^t\end{bmatrix}.$$

注意到 5.1.1 关于 n 阶线性微分方程的初值问题(5.6)与线性微分方程组的初值问题(5.7)等价性的论述,我们可以得到关于 n 阶非齐次线性微分方程的常数变易公式.

推论 3 如果 $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),f(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数,$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \tag{5.21}$$

的基本解组,那么,非齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \tag{5.28}$$

的满足初值条件

$$\varphi(t_0)=0,\varphi'(t_0)=0,\cdots,\varphi^{(n-1)}(t_0)=0,t_0\in[a,b]$$

的解由下面公式给出

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\right\}f(s)\mathrm{d}s, \tag{5.29}$$

这里 $W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]$是 $x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)$的朗斯基行列式,$W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]$是在 $W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]$中的第 k 列代以$(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$后得到的行列式,而且(5.28)的任一解 $u(t)$都具有形式

$$u(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t), \tag{5.30}$$

这里 $c_1,c_2,\cdots,c_n$是适当选取的常数.

公式(5.29)称为(5.28)的**常数变易公式**.

我们指出，这时方程(5.28)的通解可以表示为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + \varphi(t),$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是任意常数. 并且由推论 3 知道，它包括了方程(5.28)的所有解. 这就是第四章定理 7 的结论.

当 $n = 2$ 时，公式(5.29)就是

$$\varphi(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_1[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)\mathrm{d}s + x_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_2[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)\mathrm{d}s.$$

但是

$$W_1[x_1(s), x_2(s)] = \begin{vmatrix} 0 & x_2(s) \\ 1 & x_2'(s) \end{vmatrix} = -x_2(s),$$

$$W_2[x_1(s), x_2(s)] = \begin{vmatrix} x_1(s) & 0 \\ x_1'(s) & 1 \end{vmatrix} = x_1(s),$$

因此，当 $n = 2$ 时，常数变易公式变为

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)\mathrm{d}s. \tag{5.31}$$

而通解就是

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \varphi(t), \tag{5.32}$$

这里 c_1, c_2 是任意常数.

例 3 试求方程 $x'' + x = \tan t$ 的一个解.

解 易知对应的齐次线性微分方程 $x'' + x = 0$ 的基本解组为 $x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$. 我们直接利用公式(5.31)来求方程的一个解. 这时

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1.$$

由公式(5.31)即得(取 $t_0 = 0$)

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_0^t (\sin t\cos s - \cos t\sin s)\tan s\mathrm{d}s \\ &= \sin t\int_0^t \sin s\mathrm{d}s - \cos t\int_0^t \sin s\tan s\mathrm{d}s \\ &= \sin t(1-\cos t) + \cos t(\sin t - \ln|\sec t + \tan t|) \\ &= \sin t - \cos t\ln|\sec t + \tan t|.\end{aligned}$$

注意,因为 $\sin t$ 是对应的齐次线性微分方程的一个解,所以函数

$$\overline{\varphi}(t) = -\cos t\ln|\sec t + \tan t|$$

也是原方程的一个解.

习题 5.2

1. 试验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{2}{t} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

在任何不包含原点的区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的基解矩阵.

2. 考虑方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{5.15}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$是区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵,它的元为 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$.

(1) 如果 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是(5.15)的任意 n 个解,那么它们的朗斯基行列式 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)] \equiv W(t)$满足下面的一阶线性微分方程

$$W' = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)]W;$$

(提示:利用行列式的微分公式,求出 W'的表达式.)

(2) 解上面的一阶线性微分方程,证明下面的公式:

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},\quad t_0,t\in[a,b].$$

3. 设 $\boldsymbol{A}(t)$为区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{\Phi}(t)$为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$为其一解.试证:

(1) 对于方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的任一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(t)$必有 $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=$常数;

(2) $\boldsymbol{\Psi}(t)$为方程 $\boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}$.

4. 设方程组(5.15)有一个非零解 $\boldsymbol{x}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$,其中 $\varphi_n(t)\neq 0$,证明(5.15)经变换

$$y_i=x_i-\frac{\varphi_i(t)}{\varphi_n(t)}x_n\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\quad y_n=\frac{1}{\varphi_n(t)}x_n$$

可化为关于 $n-1$ 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的线性方程组,它只含 $n-1$ 个方程,且不含 y_n.

5. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$为方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$($\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常数矩阵)的标准基解矩阵(即 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$),证明:

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0),$$

其中 t_0 为某一值.

6. 设 $\boldsymbol{A}(t)$,$\boldsymbol{f}(t)$分别为在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量,证明方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$$

存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

7. 试证非齐次线性微分方程组的叠加原理:

设 $\boldsymbol{x}_1(t)$,$\boldsymbol{x}_2(t)$分别是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t),$$
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解,则 $\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)$是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t)+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.

8. 考虑方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix},$$

(1) 试验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵；

(2) 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$的满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$的解 $\varphi(t)$.

9. 试求 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix},$$

满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$的解 $\varphi(t)$.

10. 试求下列方程的通解：

(1) $x''+x=\sec t\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $x'''-8x=e^{2t}$;

(3) $x''-6x'+9x=e^{t}$.

11. 已知方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1\cos^2 t-x_2(1-\sin t\cos t), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1(1+\sin t\cos t)+x_2\sin^2 t \end{cases}$$

有解 $x_1=-\sin t, x_2=\cos t$,求其通解.

12. 已知方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{1}{t}x_1-x_2+t, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{1}{t^2}x_1+\dfrac{2}{t}x_2-t^2, \end{cases} \quad t>0$$

的对应齐次方程组有解 $x_1=t^2, x_2=-t$,求其通解.

13. 给定方程

$$x''+8x'+7x=f(t),$$

其中 $f(t)$在 $0\leqslant t<+\infty$上连续,试利用常数变易公式,证明：

(1) 如果 $f(t)$在 $0\leqslant t<\infty$上有界,则方程的每一个解在 $0\leqslant t<\infty$上有界；

(2) 如果当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to 0$，则方程的每一个解 $\varphi(t)$，满足 $\varphi(t)\to 0$（当 $t\to\infty$ 时）.

14. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\tag{5.15}$$

这里 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵. 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.15)的一个基解矩阵，n 维向量函数 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$，$\|\boldsymbol{x}\|<\infty$ 上连续，$t_0\in[a,b]$. 试证明初值问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}\end{cases}\tag{*}$$

的唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\tag{**}$$

的连续解. 反之，(**)的连续解也是初值问题(*)的解.

§5.3 常系数线性微分方程组

本节研究常系数线性微分方程组的问题，主要讨论齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\tag{5.33}$$

的基解矩阵的结构，这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵. 我们将通过代数的方法，寻求(5.33)的一个基解矩阵. 最后介绍拉普拉斯变换在常系数线性微分方程组中的应用.

5.3.1 矩阵指数 exp A 的定义和性质

为了寻求(5.33)的一个基解矩阵，需要定义矩阵指数 $\exp\boldsymbol{A}$（或写作 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$），这要利用 5.1.2 中关于矩阵序列的有关定义和结果.

如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 常数矩阵，我们定义矩阵指数 $\exp\boldsymbol{A}$ 为下面的矩阵级数的和：

$$\exp\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^m}{m!}+\cdots,\tag{5.34}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂. 这里我们规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}, 0!=1$. 这个级数对于所有的 $\boldsymbol{A}$ 都是收敛的，因而，$\exp \boldsymbol{A}$ 是一个确定的矩阵. 特别地，对所有元均为 0 的零矩阵 $\boldsymbol{O}$，有 $\exp \boldsymbol{O}=\boldsymbol{E}$.

事实上，由 5.1.2 中的性质 1°，易知对于一切正整数 k，有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right\| \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k}{k!},$$

又因对于任一矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\|\boldsymbol{A}\|$ 是一个确定的实数，所以数值级数

$$\|\boldsymbol{E}\|+\|\boldsymbol{A}\|+\frac{\|\boldsymbol{A}\|^2}{2!}+\cdots+\frac{\|\boldsymbol{A}\|^m}{m!}+\cdots$$

是收敛的(注意，它的和是 $n-1+\mathrm{e}^{\|\boldsymbol{A}\|}$). 由 5.1.2 知道，如果一个矩阵级数的每一项的范数都小于一个收敛的数值级数的对应项，则这个矩阵级数是收敛的，因而(5.34)对于一切矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都是绝对收敛的.

应当进一步指出，级数

$$\exp \boldsymbol{A}t=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} \qquad (5.35)$$

在 t 的任何有限区间上是一致收敛的. 事实上，对于一切正整数 k，当 $|t| \leqslant c$(c 是某一正常数)时，有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}\right\| \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k|t|^k}{k!} \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k c^k}{k!},$$

而数值级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\|\boldsymbol{A}\| c)^k}{k!}$ 是收敛的，因而(5.35)是一致收敛的.

矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}$ 有如下性质:

1° 如果矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是可交换的，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp \boldsymbol{A} \exp \boldsymbol{B}. \qquad (5.36)$$

事实上，由于矩阵级数(5.34)是绝对收敛的，因而关于绝对收敛数值级数运算的一些定理，如项的重新排列不改变级数的收敛性和级数的和以及级数的乘法定理等都同样地可以用到矩阵级数中来. 由二项式定理及 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，得

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\frac{\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^{k-l}}{l!\ (k-l)!}\right].\tag{5.37}$$

另一方面,由绝对收敛级数的乘法定理得

$$\begin{aligned}\exp\boldsymbol{A}\exp\boldsymbol{B}&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^i}{i!}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{B}^j}{j!}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\frac{\boldsymbol{A}^l}{l!}\frac{\boldsymbol{B}^{k-l}}{(k-l)!}\right].\end{aligned}\tag{5.38}$$

比较(5.37)和(5.38),推得(5.36).

2° 对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$,$(\exp\boldsymbol{A})^{-1}$存在,且

$$(\exp\boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A}).\tag{5.39}$$

事实上,$\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 是可交换的,故在(5.36)中,令 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$,我们推得

$$\exp\boldsymbol{A}\exp(-\boldsymbol{A})=\exp(\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}))=\exp\boldsymbol{O}=\boldsymbol{E},$$

由此即有

$$(\exp\boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A}).$$

3° 如果 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异矩阵,则

$$\exp(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})=\boldsymbol{T}^{-1}(\exp\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}.\tag{5.40}$$

事实上

$$\begin{aligned}\exp(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})&=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^k}{k!}\\&=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}}{k!}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{T}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}(\exp\boldsymbol{A})\boldsymbol{T},\end{aligned}$$

这就是我们所需要证明的.

现在我们可以着手回答有关常系数齐次线性微分方程组(5.33)的基本问题了.

定理 9 矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\boldsymbol{A}t\tag{5.41}$$

是(5.33)的基解矩阵,且 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$.

证明 由定义易知 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$.(5.41)对 t 求导,我们得到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}'(t) &= (\exp \boldsymbol{A}t)' \\
&= \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2 t}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots \\
&= \boldsymbol{A} \exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t),
\end{aligned}
$$

这就表明,$\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.33)的解矩阵.又因为 $\det \boldsymbol{\Phi}(0)=\det \boldsymbol{E}=1$,因此,$\boldsymbol{\Phi}(t)$是(5.33)的基解矩阵.证毕.

由定理 9,我们可以利用这个基解矩阵推知(5.33)的任一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$都具有形式

$$
\boldsymbol{\varphi}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}, \tag{5.42}
$$

这里 $\boldsymbol{c}$ 是一个常数向量.

在某些特殊情况下,我们容易得到(5.33)的基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的具体形式.

例 1 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角矩阵,

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \text{(其中未写出的元均为零)},
$$

试找出 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

解 由(5.34)可得

$$
\begin{aligned}
\exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{E} &+ \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \frac{t}{1!} + \begin{bmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots \\
&+ \begin{bmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \cdots = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & & \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n t} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

根据定理 9,这就是一个基解矩阵.当然,这个结果是很明显的,因为在现在的情况下,方程组可以写成 $x_k' = a_k x_k (k=1,2,\cdots,n)$,它可以分别进行积分.

例 2 试求 $x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ 的基解矩阵.

解 因为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,而且后面的两个矩阵是可交换的,我们得到

$$\begin{aligned} \exp \boldsymbol{A}t &= \exp\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t \cdot \exp\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left(\boldsymbol{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

但是,
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以,级数只有两项.因此,基解矩阵就是

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

定理 9 告诉我们,(5.33)的基解矩阵就是矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$,问题似乎已经解决了.但是 $\exp \boldsymbol{A}t$ 是由 $\boldsymbol{A}t$ 的矩阵级数定义的,这个矩阵的每一个元是什么呢?事实上还没有具体给出,上面只就一些很特殊的情况,计算了 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的元.本段利用线性代数的基本知识,仔细地讨论 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的计算方法,从而解决常系数线性微分方程组的基解矩阵的结构问题.

为了计算(5.33)的基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$,我们需要引进矩阵的特征值和特征向量的概念.

类似于第四章的 4.2.2,我们试图寻求

$$x' = Ax \tag{5.33}$$

的形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0} \tag{5.43}$$

的解,其中常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 是待定的.为此,将(5.43)代入(5.33),得到

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{c},$$

因为 $e^{\lambda t} \neq 0$,上式变为

$$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}. \tag{5.44}$$

这就表示,$e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.33)的解的充要条件就是常数 λ 和向量 $\boldsymbol{c}$ 满足方程(5.44).方程(5.44)可以看作是向量 $\boldsymbol{c}$ 的 n 个分量的一个齐次线性代数方程组,根据线性代数知识,这个方程组具有非零解的充要条件就是 λ 满足方程

$$\det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 0.$$

这就引出下面的定义:

假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n \times n$ 常数矩阵,使得关于 $\boldsymbol{u}$ 的线性代数方程组

$$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{5.45}$$

具有非零解的常数 λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**.(5.45)的对应于任一特征值 λ 的非零解 $\boldsymbol{u}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**对应于特征值 λ 的特征向量**.

n 次多项式

$$p(\lambda) \equiv \det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**,n 次代数方程

$$p(\lambda) = 0 \tag{5.46}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**.也称它为(5.33)的特征方程.

这样一来,根据上面的讨论,$e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 是(5.33)的解,当且仅当 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且 $\boldsymbol{c}$ 是对应于 λ 的特征向量.$\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程(5.46)的根.因为 n 次代数方程有 n 个根,所以 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值,当然不一定 n 个都互不相同.如果 $\lambda = \lambda_0$ 是特征方程的单根,则称 λ_0 是**简单特征根**.如果 $\lambda = \lambda_0$ 是特征方程的 k 重根(即

$p(\lambda)$具有因子$(\lambda-\lambda_0)^k$,而没有因子$(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$),则称 λ_0是 k **重特征根**.

例 3 试求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

的特征值和对应的特征向量.

解 A 的特征值就是特征方程

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -5\\ 5 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+34=0$$

的根.解之得到 $\lambda_{1,2}=3\pm 5\mathrm{i}$.对应于特征值 $\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 的特征向量

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

必须满足线性代数方程组

$$(\lambda_1 E-A)u=\begin{bmatrix}5\mathrm{i} & -5\\ 5 & 5\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

因此,u_1,u_2满足方程组

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_1-u_2=0,\\ u_1+\mathrm{i}u_2=0,\end{cases}$$

所以,对于任意常数 $\alpha\neq 0$,

$$u=\alpha\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$$

是对应于 $\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 的特征向量.类似地,可以求得对应于 $\lambda_2=3-5\mathrm{i}$ 的特征向量为

$$v=\beta\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{bmatrix},$$

其中 $\beta\neq 0$ 是任意常数.

例 4 试求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

的特征值和对应的特征向量.

解 特征方程为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0,$$

因此,$\lambda=3$ 是 A 的二重特征值.为了寻求对应于 $\lambda=3$ 的特征向量,考虑方程组

$$(3E-A)c=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

或者

$$\begin{cases}c_1-c_2=0,\\ c_1-c_2=0,\end{cases}$$

因此,向量

$$c=\alpha\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

是对应于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量,其中 $\alpha\neq0$ 是任意常数.

在例 3 中,特征向量 u 和 v 是线性无关的,因为

$$\det[u,v]=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\mathrm{i}\\ \alpha\mathrm{i} & \beta\end{vmatrix}=2\alpha\beta\neq0.$$

因而,向量 u,v 构成二维欧几里得空间的基.然而,在例 4 中,A 的特征向量只构成一个一维子空间.在这里重要的是要知道,一个给定的矩阵 A 的对应于各个特征值的特征向量的集合是否构成一个基.根据线性代数的定理——任何 k 个不同特征值所对应的 k 个特征向量是线性无关的.所以,如果 $n\times n$ 矩阵 A 具有 n 个不同的特征值,那么对应的 n 个特征向量就构成 n 维欧几里得空间的一个基.

我们提醒读者,一个 $n\times n$ 矩阵最多有 n 个线性无关的特征

向量.当然,在任何情况下,最低限度有一个特征向量,因为最低限度有一个特征值.

首先,让我们讨论当 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量时(特别当 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值时,就是这种情形),微分方程组(5.33)的基解矩阵的计算方法.

我们可以证明下面的定理.

定理 10 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$,它们对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(不必各不相同),那么矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n],\quad -\infty<t<+\infty$$

是常系数线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\tag{5.33}$$

的一个基解矩阵.

证明 由上面关于特征值和特征向量的讨论知道,每一个向量函数 $\mathrm{e}^{\lambda_j t}\boldsymbol{v}_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 都是(5.33)的一个解.因此,矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n]$$

是(5.33)的一个解矩阵.因为,向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的,所以

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\neq 0,$$

根据 5.2.1 的定理 2^* 推得,$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.33)的一个基解矩阵.定理证毕.

例 5 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$ 的一个基解矩阵.

解 由例 3 知道,$\lambda_1=3+5\mathrm{i}$ 和 $\lambda_2=3-5\mathrm{i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,而

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{bmatrix}$$

是对应于 λ_1,λ_2 的两个线性无关的特征向量.根据定理 10,矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5\mathrm{i})t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{(3-5\mathrm{i})t}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{(3+5\mathrm{i})t} & \mathrm{e}^{(3-5\mathrm{i})t}\end{bmatrix}$$

就是一个基解矩阵.

一般来说,定理 10 中的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$不一定就是 $\exp \boldsymbol{A}t$. 然而,根据 5.2.1 的推论 2*,我们可以确定它们之间的关系. 因为 $\exp \boldsymbol{A}t$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t)$都是(5.33)的基解矩阵,所以存在一个非奇异的常数矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得

$$\exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}.$$

在上式中,令 $t=0$,我们得到 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$,因此

$$\exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0). \tag{5.47}$$

根据公式(5.47),$\exp \boldsymbol{A}t$ 的计算问题相当于方程组(5.33)的任一基解矩阵的计算问题. 注意,公式(5.47)还有一个用途,这就是下面的附注所指出的.

附注 1　我们知道,如果 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵,那么 $\exp \boldsymbol{A}t$ 也是实矩阵. 因此,当 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵时,公式(5.47)给出一个构造实的基解矩阵的方法.

例 6　试求例 5 的实基解矩阵(或计算 $\exp \boldsymbol{A}t$).

解　根据(5.47)及附注 1,从例 5 中得

$$\begin{aligned}
\exp \boldsymbol{A}t &= \begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} & -i(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}) \\ i(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}) & e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \\
&= e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

现在讨论当 $\boldsymbol{A}$ 是任意的 $n\times n$ 矩阵时,(5.33)的基解矩阵的计算方法. 先引进一些有关的线性代数知识.

假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同的特征值,它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$,这里 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,

那么对应于每一个 n_j 重特征值 λ_j,线性代数方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{5.48}$$

的解的全体构成 n 维欧几里得空间的一个 n_j 维子空间 $U_j(j=1,2,\cdots,k)$,并且 n 维欧几里得空间可表示为 $U_1,U_2,\cdots,U_k$ 的直接和.

这就是说,对于 n 维欧几里得空间的每一个向量 $\boldsymbol{u}$,存在唯一的向量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_k$,其中 $\boldsymbol{u}_j\in U_j(j=1,2,\cdots,k)$,使得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_k. \tag{5.49}$$

关于分解式(5.49),我们举出它的两个特殊情形.如果 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值各不相同,这就是说,如果每一个 $n_j=1(j=1,2,\cdots,k)$,而 $k=n$.那么,对于任一向量 $\boldsymbol{u}$,分解式(5.49)中的 $\boldsymbol{u}_j$ 可以表示为 $\boldsymbol{u}_j=c_j\boldsymbol{v}_j$,其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一组线性无关的特征向量,$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是某些常数.如果 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值,即 $k=1$,这时不必对 n 维欧几里得空间进行分解.

现在利用刚刚引述过的线性代数知识着手寻求(5.33)的基解矩阵.我们先从寻求任一满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 开始.从定理 9 我们知道,$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 可以表为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$,而我们的目标就是要将 $(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 明显地计算出来,即要确切知道 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的每一个分量.根据 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的定义,一般来说,$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 的分量是一个无穷级数,因而难于计算.这里的要点就是将初始向量 $\boldsymbol{\eta}$ 进行分解,从而使得 $(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 的分量可以表示为 t 的指数函数与 t 的幂函数乘积的有限项的线性组合.

假设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 重不同特征值.这时由(5.49),我们有

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k, \tag{5.50}$$

其中 $\boldsymbol{v}_j\in \boldsymbol{U}_j(j=1,2,\cdots,k)$,因为子空间 U_j 是由方程组(5.48)产生的,$\boldsymbol{v}_j$ 一定是(5.48)的解.由此即得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^l\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0},\quad l\geqslant n_j,\quad j=1,2,\cdots,k. \tag{5.51}$$

注意到当矩阵是对角矩阵时，由例 1 知道，exp $\boldsymbol{A}t$ 是很容易求得的，这时得到

$$e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)=e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix} e^{-\lambda_j t} & & & \\ & e^{-\lambda_j t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\lambda_j t}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E},$$

由此，并根据等式(5.51)，即有

$$\begin{aligned}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j &= (\exp \boldsymbol{A}t)e^{\lambda_j t}[\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)]\boldsymbol{v}_j \\ &= e^{\lambda_j t}[\exp(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})t]\boldsymbol{v}_j \\ &= e^{\lambda_j t}\Big[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^2+\cdots \\ &\quad +\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j-1}\Big]\boldsymbol{v}_j .\end{aligned}$$

再根据等式(5.50)，知微分方程组(5.33)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t) &= (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}=(\exp \boldsymbol{A}t)\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{v}_j=\sum_{j=1}^{k}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j \\ &= \sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\Big[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^2+\cdots \\ &\quad +\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j-1}\Big]\boldsymbol{v}_j ,\end{aligned}$$

所以，方程(5.33)满足 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 最后可以写成

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\Big[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\Big]\boldsymbol{v}_j . \qquad (5.52)$$

在特别情形，当 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值时，无需将初始向量分解为(5.50). 这时对于任何 $\boldsymbol{u}$，都有

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^n\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},$$

这就是说，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^n$ 是一个零矩阵，这样一来，由 exp $\boldsymbol{A}t$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\exp \boldsymbol{A}t &= e^{\lambda t}\exp(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})t \\ &= e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^i.\end{aligned} \tag{5.53}$$

为了要从(5.52)中得到 $\exp \boldsymbol{A}t$，只要注意到

$$\exp \boldsymbol{A}t=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{E}=[(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2,\cdots,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n],$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

是单位向量．这就是说，依次令 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_n$，求得 n 个解，以这 n 个解作为列即可得到 $\exp \boldsymbol{A}t$．

例 7 如果 $\boldsymbol{A}$ 是例 4 的矩阵，试解初值问题 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$，并求 $\exp \boldsymbol{A}t$．

解 从例 4 知道，$\lambda_1=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，这时 $n_1=2$，只有一个子空间 U_1，将 $n_1=2$ 及 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{bmatrix}$ 代入(5.52)即得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t) &= e^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]\boldsymbol{\eta} \\ &= e^{3t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{bmatrix} \\ &= e^{3t}\begin{bmatrix}\eta_1+t(-\eta_1+\eta_2)\\\eta_2+t(-\eta_1+\eta_2)\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{5.54}$$

利用公式(5.53)，即得

$$\begin{aligned}\exp \boldsymbol{A}t &= e^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})] \\ &= e^{3t}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\right) \\ &= e^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\-t & 1+t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

或者分别令

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

然后代入(5.54),亦同样得到上面的结果

$$\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}.$$

例 8 如果

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix},$$

试求 $\exp \boldsymbol{A}t$.

解 这里 $n=5,\lambda=-4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 5 重特征值,直接计算可得 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^3=\boldsymbol{0}$. 因此,由公式(5.53)可得

$$\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{-4t}\left[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})^2\right],$$

这样一来

$$\exp \boldsymbol{A}t=\mathrm{e}^{-4t}\left(\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+\frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$
= e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

例 9 考虑方程组

$$
\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3, \end{cases}
$$

这里系数矩阵

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},
$$

试求满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，并求 $\exp \boldsymbol{A}t$.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$
\det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0,
$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 分别为 $n_1 = 1, n_2 = 2$ 重特征值，为了确定三维欧几里得空间的子空间 U_1 和 U_2，根据(5.48)，我们需要考虑下面方程组：

$$
(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad 和 \quad (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.
$$

首先讨论

$$
(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},
$$

或

$$\begin{cases}2u_1 - u_2 + u_3 = 0,\\ 2u_1 - u_2 + u_3 = 0,\\ u_1 - u_2 + u_3 = 0.\end{cases}$$

这个方程组的解为 $\boldsymbol{u}_1 = (0, \alpha, \alpha)^{\mathrm{T}}$,其中 α 为任意常数.子空间 U_1 是由向量 $\boldsymbol{u}_1$ 所张成的.

其次讨论

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},$$

或

$$\begin{cases}-u_1 + u_2 = 0,\\ -u_1 + u_2 = 0.\end{cases}$$

这个方程组的解为 $\boldsymbol{u}_2 = (\beta, \beta, \gamma)^{\mathrm{T}}$,其中 β, γ 是任意常数.子空间 U_2 是由向量 $\boldsymbol{u}_2$ 所张成的.

现在我们需要找出向量 $\boldsymbol{v}_1 \in U_1, \boldsymbol{v}_2 \in U_2$ 使得我们能够将初始向量 $\boldsymbol{\eta}$ 写成(5.50)的形式.因为 $\boldsymbol{v}_1 \in U_1, \boldsymbol{v}_2 \in U_2$,所以

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

其中 α, β, γ 是某些常数,这样一来

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha + \gamma \end{bmatrix},$$

因而 $\beta = \eta_1, \alpha + \beta = \eta_2, \alpha + \gamma = \eta_3$,解之得到 $\alpha = \eta_2 - \eta_1, \beta = \eta_1$, $\gamma = \eta_3 - \eta_2 + \eta_1$,且

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}.$$

根据公式(5.52),我们得到满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(t) &= e^t \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{v}_1 + e^{2t}(\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{v}_2 \\
&= e^t\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix} + e^{2t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix} \\
&= e^t\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}1+t & -t & t\\ 2t & 1-2t & t\\ t & -t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix} \\
&= e^t\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}\eta_1+t(\eta_3-\eta_2+\eta_1)\\ \eta_1+t(\eta_3-\eta_2+\eta_1)\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

为了得到 $\exp \boldsymbol{A}t$,依次令 $\boldsymbol{\eta}$ 等于 $(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 代入上式,我们得到三个线性无关的解.利用这三个解作为列,即得

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix}(1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t}\\ -e^t+(1+t)e^{2t} & e^t-te^{2t} & te^{2t}\\ -e^t+e^{2t} & e^t-e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}.$$

应该指出,公式(5.52)是本节的主要结果.公式(5.52)告诉我们,常系数线性微分方程组(5.33)的任一解都可以通过有限次代数运算求出来.在常微分方程的理论上和应用上,微分方程组的解当 $t\to\infty$ 时的性态的研究都是非常重要的.例如第六章将要讨论的微分方程组的解的稳定性就是其中的一个方面.作为公式(5.52)在这方面的一个直接应用,我们可以得到下面的定理 11.关于公式(5.52)的更深刻的应用,留待第六章去讨论.

定理 11　给定常系数线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.33}$$

那么,

1° 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是负的,则(5.33)的任一解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零;

2° 如果 A 的特征值的实部都是非正的，且实部为零的特征值都是简单特征值，则(5.33)的任一解当 $t\to+\infty$ 时都保持有界；

3° 如果 A 的特征值至少有一个具有正实部，则(5.33)至少有一个解当 $t\to+\infty$ 时趋于无穷.

证明 根据公式(5.52)，知道方程组(5.33)的任一解都可以表示为 t 的指数函数与 t 的幂函数乘积的线性组合，再根据指数函数的简单性质及定理中 1°，2°两部分所作的假设，即可得 1°，2°的证明. 为了证明 3°，设 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是 A 的特征值，其中 α,β 是实数且 $\alpha>0$. 取 $\boldsymbol{\eta}$ 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量，则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{\eta}$$

是(5.33)的一个解，于是

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|=\mathrm{e}^{\alpha t}\|\boldsymbol{\eta}\|\to+\infty(\text{当 } t\to+\infty \text{时}).$$

这就是所要证明的.

本段所讨论的步骤及公式(5.52)提供了一个实际计算(5.33)的基解矩阵的方法. 在这里我们主要应用了有关空间分解的结论. 事实上，利用其他方面的代数知识也可以相应地得到计算基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的别的方法. 例如通常微分方程教材所介绍的化若尔当(Jordan)标准形的方法就是其中的一种，它主要是利用矩阵理论中若尔当标准形方面的知识. 这一方法在理论上显得颇为简洁，但实际计算起来则可能比较麻烦. 又如 E.J.Putzer 利用哈密顿－凯莱(Hamilton－Cayley)定理，将基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的计算问题归结为求解带下三角形矩阵的齐次线性微分方程组的初值问题，方法也很简单. 现在将提及的方法介绍如下作为附注供读者参考.

附注 2　利用若尔当标准形计算基解矩阵.

首先对于矩阵 A，由矩阵理论知道，必存在非奇异的矩阵 T，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J},\qquad(5.55)$$

其中 J 具有若尔当标准形，即

$$
\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_l \end{bmatrix},
$$

这里

$$
\boldsymbol{J}_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, l)
$$

为 n_j 阶矩阵，并且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$，而 l 为矩阵 $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ 的初级因子的个数；$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ 是特征方程(5.46)的根，其间可能有相同者；矩阵中空白的元均为零.

由于矩阵 $\boldsymbol{J}$ 及 $\boldsymbol{J}_j$ ($j = 1, 2, \cdots, l$) 的特殊形式，利用定义(5.34)容易计算得到

$$
\exp \boldsymbol{J}t = \begin{bmatrix} \exp \boldsymbol{J}_1 t & & & \\ & \exp \boldsymbol{J}_2 t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp \boldsymbol{J}_1 t \end{bmatrix}, \qquad (5.56)
$$

其中

$$
\exp \boldsymbol{J}_j t = \begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{n_j - 1}}{(n_j - 1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n_j - 2}}{(n_j - 2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_j t}. \qquad (5.57)
$$

所以，如果矩阵 $\boldsymbol{J}$ 是若尔当标准形，那么可以计算得到 $\exp \boldsymbol{J}t$，由

(5.55)及矩阵指数的性质 3°,可以得到微分方程组(5.33)的基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的计算公式

$$\exp \boldsymbol{A}t=\exp(\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1})t=\boldsymbol{T}(\exp \boldsymbol{J}t)\boldsymbol{T}^{-1}. \tag{5.58}$$

当然,根据 5.2.1 的推论 1*,矩阵

$$\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{T}\exp \boldsymbol{J}t \tag{5.59}$$

也是(5.33)的基解矩阵.由公式(5.58)或者(5.59)都可以得到基解矩阵的具体结构,问题是非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的计算比较麻烦.

附注 3　计算基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$ 的另一方法.

用直接代入的方法应用哈密顿－凯莱定理容易验证[34]

$$\exp \boldsymbol{A}t=\sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j,$$

其中 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}_j=\prod_{k=1}^{j}(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{E})(j=1,2,\cdots,n)$,而 $r_1(t)$, $r_2(t),\cdots,r_n(t)$是初值问题

$$\begin{cases} r_1'=\lambda_1 r_1, \\ r_j'=r_{j-1}+\lambda_j r_j(j=2,3,\cdots,n), \\ r_1(0)=1,r_j(0)=0(j=2,3,\cdots,n) \end{cases}$$

的解,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(不必相异).

现在应用这一方法计算例 9 给出的方程的基解矩阵 $\exp \boldsymbol{A}t$.这时 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$,求解初值问题:

$$\begin{cases} r_1'=r_1, \\ r_2'=r_1+2r_2, \\ r_3'=r_2+2r_3, \\ r_1(0)=1,r_2(0)=r_3(0)=0, \end{cases}$$

得到 $r_1=\mathrm{e}^t,r_2=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t,r_3=(t-1)\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t$,计算得

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_2=(A-E)(A-2E)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

最后得到

$$\begin{aligned}\exp At &= \sum_{j=0}^{2} r_{j+1}(t)P_j\\ &=\begin{bmatrix}(1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t}\\ (1+t)e^{2t}-e^{t} & -te^{2t}+e^{t} & te^{2t}\\ e^{2t}-e^{t} & -e^{2t}+e^{t} & e^{2t}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

与例 9 所得结果相同.

最后,我们给出非齐次线性微分方程组

$$x'=Ax+f(t) \tag{5.60}$$

的常数变易公式,这里 A 是 $n\times n$ 常数矩阵,$f(t)$是已知的连续向量函数.因为(5.60)对应的齐次线性微分方程组(5.33)的基解矩阵为$\Phi(t)=\exp At$,所以,5.2.2 中的常数变易公式在形式上变得特别简单.这时,我们有 $\Phi^{-1}(s)=\exp(-sA)$,$\Phi(t)\Phi^{-1}(s)=\exp[(t-s)A]$,若初值条件是 $\varphi(t_0)=\eta$,则 $\varphi_k(t)=\exp[(t-t_0)A]\eta$,(5.60)的解就是

$$\varphi(t)=\exp[(t-t_0)A]\eta+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)A]f(s)ds. \tag{5.61}$$

我们可以利用本段提供的方法具体构造基解矩阵 $\exp At$.然而,除非是某些特殊的情形,要具体计算(5.61)中的积分式也是不容易的.

例 10 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$$

试求方程 $x'=Ax+f(t)$满足初值条件 $\varphi(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的解 $\varphi(t)$.

解 由前面的例 6 知道,

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix},$$

代入公式(5.61),我们得到(利用 $t_0=0$)

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix} \cos 5(t-s) & \sin 5(t-s) \\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$

我们计算上面的积分如下:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{bmatrix}$$

$$+ e^{3t}\int_0^t e^{-4s}\begin{bmatrix} \cos 5t\cos 5s + \sin 5t\sin 5s \\ -\sin 5t\cos 5s + \cos 5t\sin 5s \end{bmatrix} ds,$$

利用公式或者分部积分法,得到

$$\int_0^t e^{-4s}\cos 5s\,ds = \frac{e^{-4s}}{16+25}(-4\cos 5s + 5\sin 5s)\Big|_{s=0}^{s=t},$$

$$\int_0^t e^{-4s}\sin 5s\,ds = \frac{e^{-4s}}{16+25}(-4\sin 5s - 5\cos 5s)\Big|_{s=0}^{s=t},$$

最后我们得到

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix} 4\cos 5t + 46\sin 5t - 4e^{-4t} \\ 46\cos 5t - 4\sin 5t - 5e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

*5.3.3 拉普拉斯变换的应用

拉普拉斯变换可以用于解常系数高阶线性微分方程,也可以用来解常系数线性微分方程组.为此,首先将拉普拉斯变换推广到向量函数的情形.我们定义

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{f}(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\boldsymbol{f}(t)dt,$$

其中 $\boldsymbol{f}(t)$是 n 维向量函数,要求它的每一个分量都存在拉普拉斯

变换.这里,我们通过几个例子介绍如何应用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程组.如果掌握了较好的计算机软件知识,可以直接利用计算机软件进行求解(参阅附录Ⅱ).

例 11 利用拉普拉斯变换求解例 10.

解 将方程组写成分量形式,即

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_2 + e^{-t}, \\ x_2' = -5x_1 + 3x_2, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1. \end{cases}$$

令 $X_1(s) = \mathscr{L}[x_1(t)], X_2(s) = \mathscr{L}[x_2(t)]$,对方程组施行拉普拉斯变换得到

$$\begin{cases} sX_1(s) = 3X_1(s) + 5X_2(s) + \dfrac{1}{s+1}, \\ sX_2(s) - 1 = -5X_1(s) + 3X_2(s), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-3)X_1(s) - 5X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}, \\ 5X_1(s) + (s-3)X_2(s) = 1. \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{\dfrac{s-3}{s+1} + 5}{(s-3)^2 + 5^2} \\ \qquad = \dfrac{1}{41}\left[4\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2} + 46\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2} - 4\dfrac{1}{s+1}\right], \\ X_2(s) = \dfrac{s-3-\dfrac{5}{s+1}}{(s-3)^2+5^2} \\ \qquad = \dfrac{1}{41}\left[46\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2} - 4\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2} - 5\dfrac{1}{s+1}\right], \end{cases}$$

取反变换或查拉普拉斯变换表即得

$$x_1(t) = \frac{1}{41}e^{3t}(4\cos 5t + 46\sin 5t - 4e^{-4t}),$$

$$x_2(t)=\frac{1}{41}e^{3t}(46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t}).$$

所得结果跟例 10 一致.

例 12 试求方程组

$$\begin{cases}x_1'=2x_1+x_2\\ x_2'=-x_1+4x_2\end{cases}$$

满足初值条件 $\varphi_1(0)=0,\varphi_2(0)=1$ 的解$(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$,并求出它的基解矩阵.

解 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)],X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$.假设 $x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t)$满足微分方程组,我们对方程取拉普拉斯变换,得到

$$\begin{cases}sX_1(s)-\varphi_1(0)=2X_1(s)+X_2(s),\\ sX_2(s)-\varphi_2(0)=-X_1(s)+4X_2(s),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s-2)X_1(s)-X_2(s)=\varphi_1(0)=0,\\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\varphi_2(0)=1.\end{cases}$$

解出 $X_1(s),X_2(s)$,得到

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-3)^2},\quad X_2(s)=\frac{s-2}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^2},$$

取反变换,即得

$$\varphi_1(t)=te^{3t},\quad \varphi_2(t)=e^{3t}+te^{3t}=(1+t)e^{3t}.$$

为了要寻求基解矩阵,再求满足初值条件 $\psi_1(0)=1,\psi_2(0)=0$ 的解$(\psi_1(t),\psi_2(t))$.如前一样,我们得到方程组

$$\begin{cases}(s-2)X_1(s)-X_2(s)=\psi_1(0)=1,\\ X_1(s)+(s-4)X_2(s)=\psi_2(0)=0\end{cases}$$

的解为

$$X_1(s)=\frac{s-4}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{(s-3)^2},\quad X_2(s)=\frac{-1}{(s-3)^2},$$

取反变换，得到

$$\psi_1(t)=(1-t)e^{3t}, \quad \psi_2(t)=-te^{3t}.$$

这样一来，基解矩阵就是

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\psi_1(t) & \varphi_1(t)\\ \psi_2(t) & \varphi_2(t)\end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}.$$

读者可以将结果与前面的例 7 比较一下.

从上两例中我们可以看到，应用拉普拉斯变换可以将求解线性微分方程组的问题化为求解线性代数方程组的问题. 如果方程组的阶数不很高的话，那么它的解是容易求出来的.

应用拉普拉斯变换还可以直接去解高阶的常系数线性微分方程组，而不必先化为一阶的常系数线性微分方程组.

例 13 试求方程组

$$\begin{cases}x_1''-2x_1'-x_2'+2x_2=0,\\ x_1'-2x_1+x_2'=-2e^{-t}\end{cases}$$

满足初值条件 $\varphi_1(0)=3, \varphi_1'(0)=2, \varphi_2(0)=0$ 的解 $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

解 令 $X_1(s)=\mathscr{L}[\varphi_1(t)], X_2(s)=\mathscr{L}[\varphi_2(t)]$，对方程组取拉普拉斯变换，我们得到

$$\begin{cases}[s^2X_1(s)-3s-2]-2[sX_1(s)-3]-sX_2(s)+2X_2(s)=0,\\ [sX_1(s)-3]-2X_1(s)+sX_2(s)=\dfrac{-2}{s+1},\end{cases}$$

整理后得到

$$\begin{cases}(s^2-2s)X_1(s)-(s-2)X_2(s)=3s-4,\\ (s-2)X_1(s)+sX_2(s)=\dfrac{3s+1}{s+1}.\end{cases}$$

解上面方程组，即有

$$
\begin{cases}
X_1(s)=\dfrac{3s^2-4s-1}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s-2},\\
X_2(s)=\dfrac{2}{(s+1)(s-1)}=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1},
\end{cases}
$$

再取反变换就得到解

$$\varphi_1(t)=e^t+e^{-t}+e^{2t},\quad \varphi_2(t)=e^t-e^{-t}.$$

从上述各例可以看到,应用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程(组)的初值问题是比较快捷的.但遗憾的是,它对方程中强迫项的性质要求比较高.因此,并非任何常系数线性微分方程(组)都能用拉普拉斯变换法进行求解,这是必须注意的.

习题 5.3

1. 假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,试证:

(1) 对任意的常数 c_1,c_2 都有

$$\exp(c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A})=\exp c_1\boldsymbol{A}\cdot\exp c_2\boldsymbol{A};$$

(2) 对任意整数 k,都有

$$(\exp\boldsymbol{A})^k=\exp k\boldsymbol{A}.$$

(当 k 是负整数时,规定$(\exp\boldsymbol{A})^k=[(\exp\boldsymbol{A})^{-1}]^{-k}$.)

2. 试证:如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解,那么

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}.$$

3. 试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量:

(1) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$.

4. 试求方程组 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个基解矩阵,并计算 $\exp\boldsymbol{A}t$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为:

(1) $\begin{bmatrix}-2&1\\-1&2\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$;　　(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. 试求方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵,并求满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,　　$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,　　$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,　　$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6. 试求方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

(1) $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix}$.

7. 假设 m 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.试证非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}e^{mt}$$

有一解形如

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{p}e^{mt},$$

其中 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}$ 是常数向量.

8. 给定方程组

$$\begin{cases} x_1'' - 3x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0, \\ x_1' - 2x_1 + x_2' + x_2 = 0, \end{cases}$$

(1) 试证上面方程组等价于方程组 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$,其中

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1'\\x_2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&2\\2&-1&-1\end{bmatrix};$$

(2) 试求(1)中的方程组的基解矩阵;

(3) 试求原方程组满足初值条件

$$x_1(0)=0,\quad x_1'(0)=1,\quad x_2(0)=0$$

的解.

9. 试用拉普拉斯变换法解第5题和第6题,也可以利用计算机软件求解之.

10. 求下列初值问题的解:

(1) $\begin{cases}x_1'+x_2'=0,\\x_1'-x_2'=1,\end{cases}\quad x_1(0)=1,x_2(0)=0;$

(2) $\begin{cases}x_1''+3x_1'+2x_1+x_2'+x_2=0,\\x_1'+2x_1+x_2'-x_2=0,\\x_1(0)=1,x_1'(0)=-1,x_2(0)=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1''-m^2x_2=0,\\x_2''+m^2x_1=0,\\x_1(0)=\eta_1,x_1'(0)=\eta_2,x_2(0)=\eta_3,x_2'(0)=\eta_4.\end{cases}$

11. 假设 $y=\varphi(x)$是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''+ay'+by=0,\\y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$$

的解,试证

$$y=\int_0^x\varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

是方程

$$y''+ay'+by=f(x)$$

的解,这里 $f(x)$为已知连续函数.

本章学习要点

线性微分方程组理论是微分方程理论中重要的组成部分.无

论从应用的角度或者从理论的角度来说，本章所提供的方法和结果都是重要的，它是进一步学习常微分方程理论和其他有关课程的必不可少的基础知识．学习本章时应注意如下几点：

1．理解线性微分方程组解的存在唯一性定理，进一步熟悉和掌握逐步逼近法．要熟悉向量与矩阵的表述方法．

2．掌握线性微分方程组的一般理论主要是了解它的所有解的代数结构问题．这里的中心问题是齐次线性微分方程组的基解矩阵的概念．有了基解矩阵，齐次线性微分方程组的任一解可由基解矩阵表示，而非齐次线性微分方程组的任一解亦可通过积分由基解矩阵表示，这就是所谓常数变易公式．一般理论的基本内容可以概括在定理 1^*，定理 2^* 及常数变易公式(5.27)中．读者可以此为线索了解有关内容．

3．基解矩阵的存在与具体寻求是不同的两回事．一般齐次线性微分方程组的基解矩阵是无法通过积分得到的．但当系数矩阵是常数矩阵时，可以通过代数方法求出基解矩阵，这时可利用矩阵指数 $\exp \boldsymbol{A}t$，给出基解矩阵的一般形式，而基解矩阵的具体计算方法，主要是利用公式(5.52)．在理论上还要注意用若尔当标准形表示基解矩阵的方法．

拉普拉斯变换是求解常系数线性微分方程组的初值问题的一个简便方法，要懂得运用．也可以利用有关计算机软件直接求解．

4．掌握高阶线性微分方程与线性微分方程组的关系，懂得将线性微分方程组的有关结果推论到高阶线性微分方程上去，从而在一个统一的观点下理解这两部分的内容．

第六章

非线性微分方程

在本书第一章绪论中我们给出了一些描述客观现实世界运动过程的常微分方程模型,这些常微分方程有线性或非线性、有可解或不可解等各种类型.前面几章讨论了一阶微分方程的初等解法、解的存在性和线性微分方程(组),这一章我们将讨论非线性常微分方程.非线性模型往往更能反映运动过程的本质,而非线性常微分方程大多数都不能直接求解.这就提出一个如何研究非线性常微分方程的问题.

早在一百多年前,俄国李雅普诺夫和法国庞加莱曾分别提出常微分方程的稳定性和定性的理论和方法,为我们指出研究非线性常微分方程的新方向.经过一百多年的发展,常微分方程的稳定性和定性理论已成为常微分方程理论的重要分支.

近三十多年来,出现了研究带参数的方程当参数变化时方程解的类型变化的分支(又称分歧、分岔)问题的热潮,特别是,由此引出发现有奇异(怪)吸引子及混沌现象的这类微分方程解的新的性质.分支和混沌理论的发展不但影响了常微分方程的研究,并在科学界中掀起了一股在确定系统中寻求随机现象的热潮,更触发了打破几百年来牛顿确定论的科学方法论的革命.

本章第1,2节,先给出常微分方程组的存在唯一性定理,然后介绍稳定性概念及稳定性理论的李雅普诺夫第二方法(V函数方法);第3,4节的内容是平面定性理论,包括奇点、极限环与平面图

貌;第 5 节为分支和混沌,包括单参数常微分方程的分支和 Lorenz 方程与混沌;第 6 节则涉及哈密顿方程以及与其有关的混沌与孤立子.

这一章,希望能通过非线性常微分方程的分析给读者一个常微分方程理论及其主要发展的简单概貌.

§6.1 稳 定 性

6.1.1 常微分方程组的存在唯一性定理

本章讨论非线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n \tag{6.1}$$

的解的性态.在讨论解的性态之前,首先要保证解的存在、唯一等性质,即要讨论方程组(6.1)的解的存在唯一性以及解的延拓和解对初值的连续性、可微性等,这可概括为下面的定理.由于定理的证明方法同一阶方程的情形类似,这里就不重复了.

设给定方程组(6.1)的初值条件为

$$\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0, \tag{6.2}$$

考虑包含点$(t_0,\boldsymbol{y}_0)=(t_0;y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})$的某区域

$$R:|t-t_0|\leqslant a,\ \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|\leqslant b.$$

在本章中 $\boldsymbol{y}$ 的范数 $\|\boldsymbol{y}\|$ 定义为 $\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$. 所谓 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$在域 G 上关于$\boldsymbol{y}$满足局部利普希茨条件是指:对于 G 内任一点$(t_0,\boldsymbol{y}_0)$,存在闭邻域 $R\subset G$,而$\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$于 R 上关于$\boldsymbol{y}$满足利普希茨条件,即存在常数 $L>0$,使得不等式

$$\|\boldsymbol{g}(t;\tilde{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{g}(t;\bar{\boldsymbol{y}})\|\leqslant L\|\tilde{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{y}}\| \tag{6.3}$$

对所有$(t,\tilde{y}),(t,\bar{y})\in R$成立. L称为利普希茨常数.

存在唯一性定理 如果向量函数$\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$在域$R$上连续且关于$\boldsymbol{y}$满足利普希茨条件,则方程组(6.1)存在唯一解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$,它在区间$|t-t_0|\leqslant h$上连续,而且

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0;t_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{y}_0,$$

这里$h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(t,y)\in R}\|\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})\|$.

解的延拓与连续性定理 如果向量函数$\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$在某域$G$内连续,且关于$\boldsymbol{y}$满足局部利普希茨条件,则方程组(6.1)的满足初值条件(6.2)的解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$ $((t_0,\boldsymbol{y}_0)\in G)$可以延拓,或者延拓到$+\infty$(或$-\infty$);或者使点$(t,\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0))$任意接近区域$G$的边界. 而解$\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$作为$t,t_0,\boldsymbol{y}_0$的函数在它的存在范围内是连续的.

可微性定理 如果向量函数$\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})$及$\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(i,j=1,2,\cdots,n)$在域$G$内连续,那么方程组(6.1)由初值条件(6.2)确定的解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$作为$t,t_0,\boldsymbol{y}_0$的函数,在它的存在范围内是连续可微的.

6.1.2 李雅普诺夫稳定性

让我们从一个简单的方程谈起. 考虑一阶非线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Ay-By^2, \tag{6.4}$$

其中A,B为常数且$A\cdot B>0$,初值条件为$y(0)=y_0$.

由§2.1.1例3知,方程(6.4)有通解

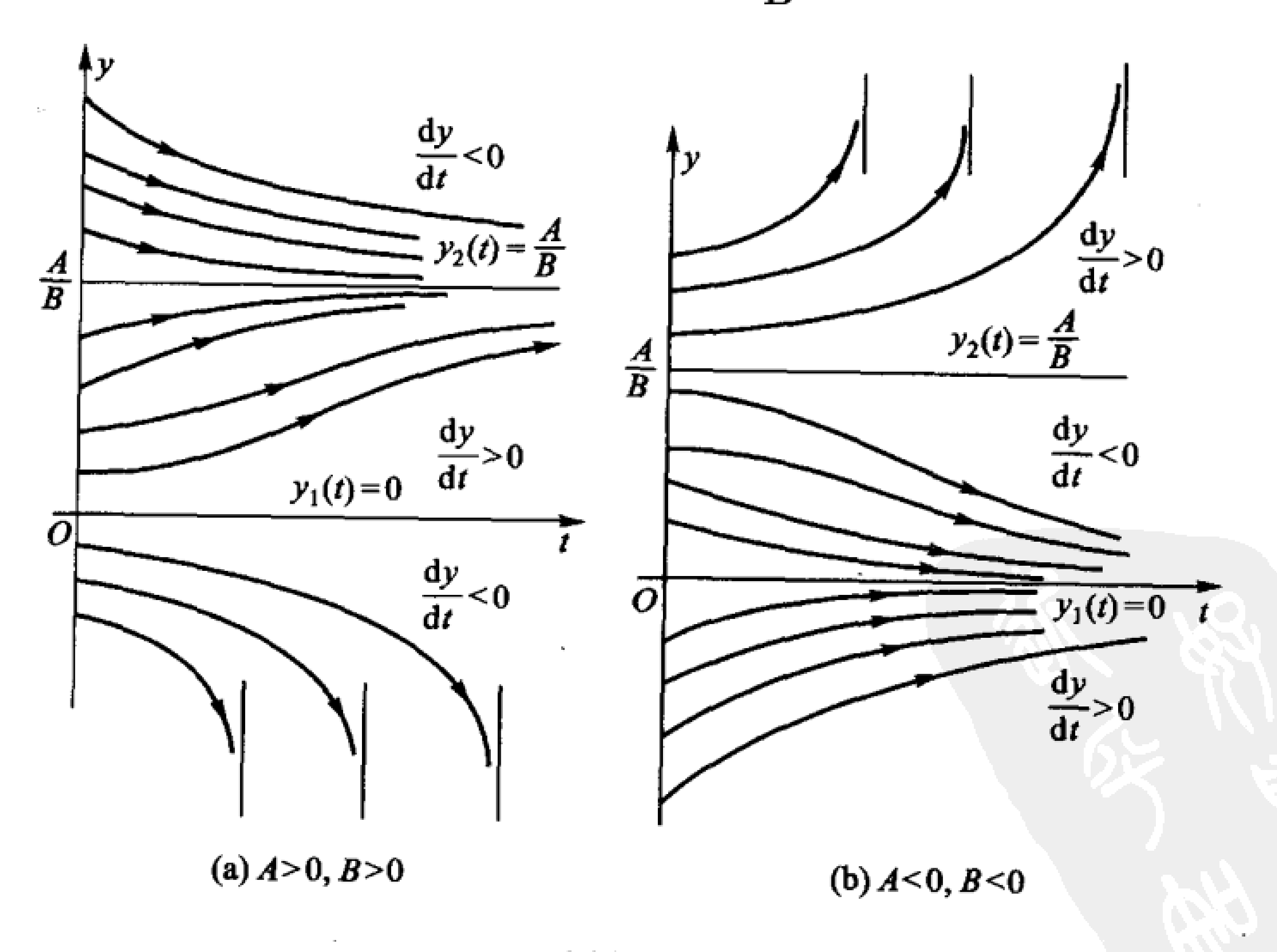
$$y=\frac{A}{B+c\mathrm{e}^{-At}}\ (c\text{ 为任意常数})$$

和两特解$y_1=0$与$y_2=\dfrac{A}{B}$. 考虑初值条件,得到方程(6.4)满足初

值条件的解

$$y=\frac{A}{B+\left(\frac{A}{y_0}-B\right)e^{-At}}. \tag{6.5}$$

对应于初值 y_0 的所有可能情况，解(6.5)的图像如图(6.1)所示.从图中可以看到，当 $A>0,B>0$ 时，满足初值条件 $y(0)=y_0>0$ 的所有解均渐近地趋于解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$；而当 $A<0$ 及 $B<0$ 时，满足初值条件 $y(0)=y_0<\frac{A}{B}$ 的解均趋于解 $y_1(t)=0$，但满足初值条件 $y(0)=y_0>\frac{A}{B}$ 的解则趋向无穷，且以平行于 y 轴的直线为渐近线.这些特性也可以由解的表达式(6.5)直接推出.在第一种情形，即 $A>0,B>0$ 时，解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$ 被说成是稳定的，而对解



图(6.1)

$y_1(t)=0$,由于满足初值条件 $y(0)=y_0<\dfrac{A}{B}$ 的解均越来越离开它,这样的解 $y_1(t)$ 被说成不是稳定的,或不稳定的;同样,在第二种情形,即 $A<0$ 和 $B<0$ 时,解 $y_1(t)$ 是稳定的,而解 $y_2(t)$ 为不稳定的.

稳定性的物理意义是明显的,因为用微分方程描述的物质运动(例如某一质点运动)的特解密切依赖于初值,而初值的计算或测定实际上不可避免地出现误差和干扰.如果描述这运动的微分方程的特解是不稳定的,则初值的微小误差或干扰将招致"差之毫厘,谬以千里"的严重后果.因此,这样不稳定的特解将不宜作为设计的依据;反之,稳定的特解才是我们最感兴趣的.这说明解的稳定性的研究是一个十分重要的问题,可是大多数非线性微分方程是不可能或很难求出其解的具体表达式来的.因此,必须要求在不具体解出方程的情况下判断方程的解的稳定性态.

当我们研究方程组(6.1)的解的性态时往往与具有某些特殊性质的特解联系在一起.为研究方程组(6.1)的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 邻近的解的性态,通常先利用变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{6.6}$$

把方程组(6.1)化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x}), \tag{6.7}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{y})-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(t))-\boldsymbol{g}(t;\boldsymbol{\varphi}(t)).\end{aligned}$$

此时显然有

$$\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}, \tag{6.8}$$

而把方程组(6.1)的特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 变为方程组(6.7)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.于是,问题就化为讨论方程组(6.7)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 邻近的解的性态.

例如对方程(6.4)的特解 $y_2(t)=\dfrac{A}{B}$,我们可以通过变换

$$x=y-\frac{A}{B}$$

把方程(6.4)变为方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-Ax-Bx^2. \tag{6.9}$$

这样,讨论方程(6.4)的特解 $y_2(t)=\dfrac{A}{B}$的稳定性态便可以化为讨论方程(6.9)的零解 $x=0$ 的稳定性态.将方程的特解通过变换(6.6)化为零解再进行零解稳定性态的讨论,可不必就各种特解讨论其稳定性态.驻定微分方程常用的特解是常数解,即方程右端函数等于零时的解,如方程(6.4)的特解 y_1 和 y_2.微分方程的常数解,又称为驻定解或平衡解(见§1.2).

下面给出方程组(6.7)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的稳定性——通常称为李雅普诺夫意义下的稳定性——的定义.

考虑微分方程组(6.7),假设其右端函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$满足条件(6.8)且在包含原点的域 G 内有连续的偏导数,从而满足解的存在唯一性、延拓、连续性和可微性定理的条件.

定义 1 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$(δ 一般与 ε 和 t_0 有关),使当任一 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$ 时,方程组(6.7)的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$,对一切 $t\geqslant t_0$均有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,$$

则称方程组(6.7)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为**稳定**的.

如果(6.7)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 稳定,且存在这样的 $\delta_0>0$ 使当 $\|x_0\|<\delta_0$时,满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$的解 $\boldsymbol{x}(t)$均有

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0},$$

则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为**渐近稳定**的.

如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 渐近稳定,且存在域 D_0,当且仅当 $\boldsymbol{x}_0\in D_0$时满足

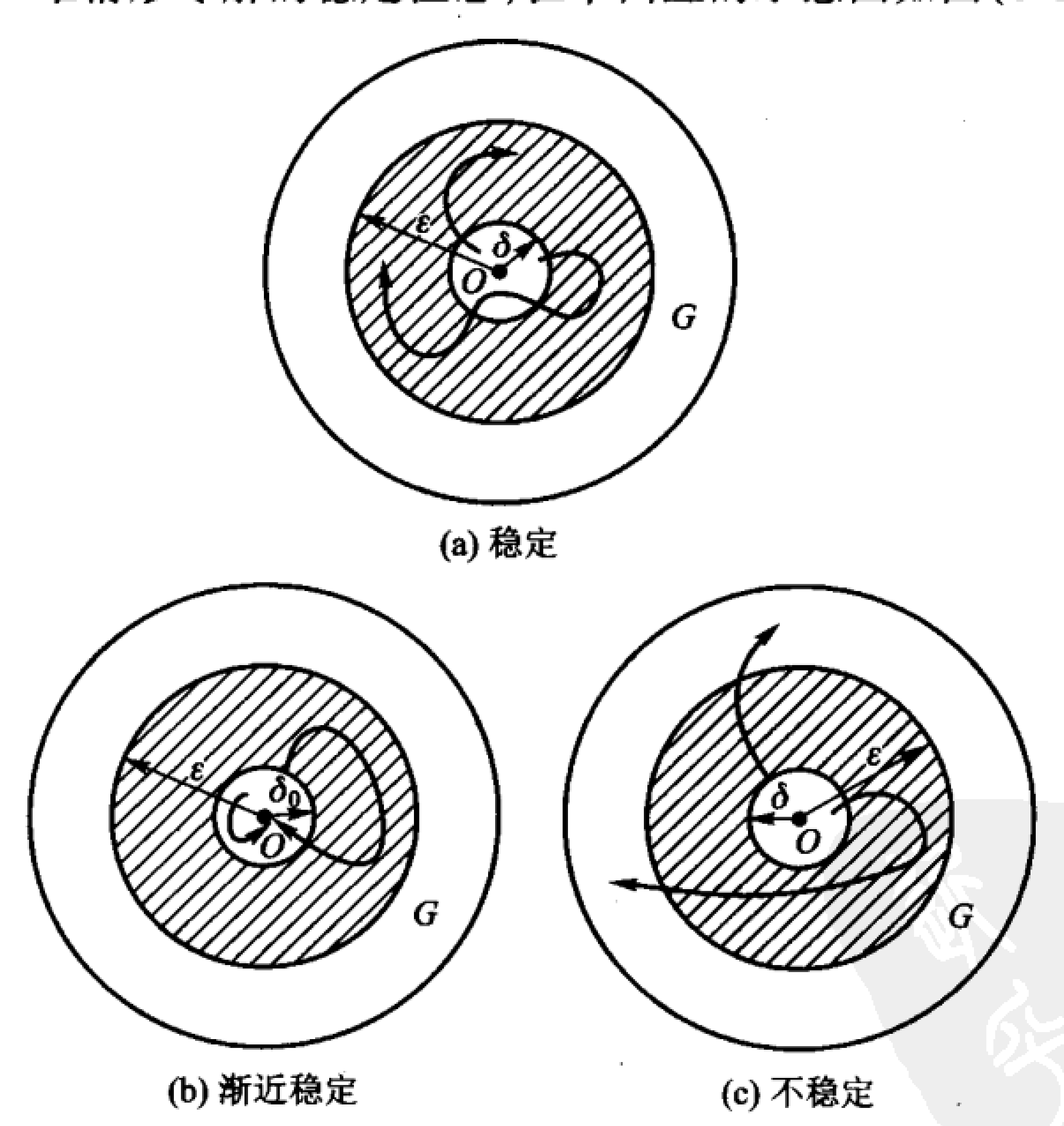
初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$，则域 D_0 称为**(渐近)稳定域**或**吸引域**. 若稳定域为全空间，即 $\delta_0=+\infty$，则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为**全局渐近稳定**的或简称**全局稳定**的.

当零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不是稳定时，称它是不稳定的. 即是说：如果对某个给定的 $\varepsilon>0$ 不管 $\delta>0$ 怎样小，总有一个 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$，使由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 所确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$，至少存在某个 $t_1>t_0$ 使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_1)\|=\varepsilon,$$

则称方程组(6.7)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为**不稳定**的.

二维情形零解的稳定性态，在平面上的示意图如图(6.2).



图(6.2)　零解的稳定性态

例如对方程(6.4),当 $A<0$ 及 $B<0$ 时其零解 $y=0$ 为渐近稳定的,稳定域为 $y<\frac{A}{B}$.这只要取 $\delta<\varepsilon$ 及 $\delta_0=\frac{A}{B}$ 即可.事实上,由解的表达式(6.5)或图(6.1b)知道,当 $y_0<\frac{A}{B}$ 时,解 $y(t)$ 对一切 $t\geqslant t_0\geqslant 0$ 有 $|y(t)|\leqslant|y(t_0)|$ 成立,且

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=0.$$

故由定义,零解 $y=0$ 为渐近稳定的,稳定域为 $y<\frac{A}{B}$.

同样,当 $A>0,B>0$ 时,方程(6.9)的零解 $x=0$ 即方程(6.4)的解 $y_2(t)=\frac{A}{B}$ 为渐近稳定的,稳定域为 $x>-\frac{A}{B}$ 或 $y>0$.而当 $A>0,B>0$ 时方程(6.4)的零解 $y=0$ 和当 $A<0,B<0$ 时方程(6.9)的零解 $x=0$ 或方程(6.4)的解 $y=\frac{A}{B}$ 都是不稳定的.这同样可由解的表达式(6.5)直接推出或从图(6.1)看出.

6.1.3 按线性近似决定稳定性

有了稳定性的概念,现在我们考虑最简单的一阶常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{6.10}$$

由第五章 §5.3 的(5.52)式知道,它的任一解均可表为形如

$$\sum_{m=0}^{l_i} c_{im}t^m \mathrm{e}^{\lambda_i t}, \qquad 1\leqslant i\leqslant n \tag{6.11}$$

的线性组合,这里 λ_i 为方程组(6.10)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0 \tag{6.12}$$

的根($\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵),l_i 为零或正整数,由根 λ_i 的重数决定.

根据(6.11),与第五章的定理 11 相对应的我们可以得到如下的结论:

定理 1 若特征方程(6.12)的根均具有负实部,则方程组(6.10)的零解是渐近稳定的;若特征方程(6.12)具有正实部的根,则方程组(6.10)的零解是不稳定的;若特征方程(6.12)没有正实部的根,但有零根或具零实部的根,则方程组(6.10)的零解可能是稳定的也可能是不稳定的,这要看零根或具零实部的根其重数是否等于 1 而定.

现在考虑非线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}), \tag{6.13}$$

其中 $\boldsymbol{R}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,且满足条件

$$\frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\longrightarrow 0(\text{当 }\|\boldsymbol{x}\|\to 0\text{ 时}). \tag{6.14}$$

显然 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是方程组(6.13)的解.亦是方程组的奇点.见§1.2.

对于非线性微分方程组(6.13)的稳定性态,自然会提出这样的问题:在什么条件下,(6.13)零解的稳定性能由线性微分方程组(6.10)的零解的稳定性来决定.这便是所谓按线性近似决定稳定性的问题.我们有下面的结论:

定理 2 若特征方程(6.12)没有零根或零实部的根,则非线性微分方程组(6.13)的零解的稳定性态与其线性近似的方程组(6.10)的零解的稳定性态一致.这就是说,当特征方程(6.12)的根均具有负实部时,方程组(6.13)的零解是渐近稳定的,而当特征方程具有正实部的根时,其零解是不稳定的.

至于特征方程(6.12)除有负实部的根外还有零根或具零实部的根的情形,非线性微分方程组(6.13)的零解的稳定性态并不能由线性近似方程组(6.10)来决定.因为可以找到这样的例子,适当变动 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$(当然条件(6.14)仍满足),便可使非线性微分方程组(6.13)的零解是稳定的或是不稳定的,这种情形称为

临界情形.如何解决临界情形的稳定性问题,是常微分方程稳定性理论的重大课题之一.

关于定理 2 的证明,最早是由李雅普诺夫用第二方法解决的.我们把它留在后面§6.2 中再补充证明.

例 1 考虑有阻力的数学摆的振动,其微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0, \tag{6.15}$$

这里长度 l,质量 m 和重力加速度 g 均大于 0,并设阻力系数 $\mu>0$.令 $x=\varphi, y=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$,将方程(6.15)化为一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y, \tag{6.16}$$

原点是方程组的零解.为了判别能否按线性近似来确定零解的稳定性态,将方程组改写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y-\frac{g}{l}(\sin x-x),$$

于是相应的线性近似方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y. \tag{6.17}$$

而非线性项

$$R(x,y)=-\frac{g}{l}(\sin x-x)=-\frac{g}{l}\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

满足条件(6.14).

线性微分方程组(6.17)的特征方程为

$$\lambda^2+\frac{\mu}{m}\lambda+\frac{g}{l}=0,$$

其根是

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}}.$$

因 $\mu>0$,特征根均具负实部,根据定理 2,当摆有阻力时,微分方程组(6.16)的零解是渐近稳定的.

对于方程(6.16),其驻定解除原点外,还有 $x=n\pi(n=\pm1,\pm2,\cdots)$, $y=0$. 由于 $\sin x$ 的周期性,只要再分析一下驻定解$(\pi,0)$的性态就可以了.

为了研究对应于特解$(\pi,0)$的稳定性,作变换 $x^*=x-\pi$, $y^*=y$,于是方程组(6.16)化为

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}=y^*,\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{l}\sin x^*-\frac{\mu}{m}y^*. \qquad (6.16)^*$$

它的线性近似方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}=y^*,\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{l}x^*-\frac{\mu}{m}y^*,$$

而对应的特征方程的根为

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+4\frac{g}{l}},$$

这是一对异号实根.依定理 2 知道非线性微分方程组$(6.16)^*$的零解是不稳定的,即非线性微分方程组(6.16)的解 $x=\pi$, $y=0$ 是不稳定的.上述结论对解 $x=\pm(2k+1)\pi$, $y=0$(k 为正整数)同样正确.

如果摆没有阻力,即阻力系数 $\mu=0$,则其线性微分方程组(6.17)的特征方程的根为

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{g}{l}},$$

是一对纯虚根,依定理 1,线性微分方程组(6.17)的解是稳定的.此时相应的非线性方程组(6.16)的零解的稳定性态无法决定,属于临界情形.但对方程组$(6.16)^*$,其线性组的特征根仍为一对异号实根,故当没有阻力即 $\mu=0$ 时,方程组(6.16)的解 $x=\pi$, $y=0$ 仍是不稳定的.

定理2说明非线性微分方程组(6.13)零解是否为渐近稳定的取决于其相应的特征方程(6.12)的全部的根是否具有负实部.但当 n 相当大时,(6.12)的根是不容易甚至不能具体地用公式表达出来的.不过,我们并不要求找出特征方程的全部根,而只要求知道所有各根的实部是否均为负.下面介绍赫尔维茨(Hurwitz)判别代数方程的根的实部是否均为负的法则.

定理3 设给定常系数的 n 次代数方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (6.18)$$

其中 $a_0>0$,作行列式

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1},$$

其中 $a_i=0$(对一切 $i>n$).

那么,方程(6.18)的一切根均有负实部的充分必要条件是下列不等式同时成立:

$$a_1>0, \quad \Delta_2>0, \quad \Delta_3>0, \quad \cdots, \quad \Delta_{n-1}>0, \quad a_n>0.$$

这个定理的详细证明见高等代数的课本,这里从略.

例2 考虑一阶非线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - z + x^2e^x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + x^3y + z^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z - e^x(y^2 + z^2), \end{cases}$$

这里线性近似方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

或

$$\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3=0.$$

由此得赫尔维茨行列式

$$a_0=1,a_1=4,\Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=17,a_3=3,$$

根据定理3,特征方程所有根均有负实部,由定理2知零解 $x=y=z=0$为渐近稳定的.

例 3 对三次代数方程

$$\lambda^3+(a+b+1)\lambda^2+b(a+c)\lambda+2ab(c-1)=0,$$

其中 $a>0,b>0,c>0$,考虑其根均具负实部时参数 c 的变化范围.

解 计算赫尔维茨行列式,有

$$a_0=1,\quad a_1=a+b+1,$$

$$\Delta_2=(a+b+1)\cdot b(a+c)-2ab(c-1),$$

$$a_3=2ab(c-1),$$

由定理3,方程的根均具负实部的充要条件是 $c>1$ 及 $\Delta_2>0$,即

$$a<b+1,c>1 \quad 或 \quad a>b+1,1<c<c_0,$$

其中 $c_0=\dfrac{a(a+b+3)}{a-b-1}$.

习题 6.1

1. 对下列方程,(a) 求出其驻定解,并画出方程的经过$(0,x_0)$的积分曲线的走向(草图),从而判断各驻定解的稳定性;(b) 作变量变换,使各驻定解对应于新方程的零解:

(1) $\frac{dx}{dt}=Ax+Bx^2, A>0, B>0, -\infty<x_0<+\infty$;

(2) $\frac{dx}{dt}=x(x-1)(x-3)$;

(3) $\frac{dx}{dt}=x(1-x)(x-3)$.

2. 直接由(6.5)出发，讨论方程(6.4)的解 $y_1(t)=0$ 和 $y_2(t)=\frac{A}{B}$ 的稳定性态(即稳定、渐近稳定、不稳定).

3. 试求出下列方程组的所有驻定解，并讨论相应的驻定解的稳定性态：

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(1-x-y),\\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{4}y(2-3x-y);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=9x-6y+4xy-5x^2,\\ \frac{dy}{dt}=6x-6y-5xy+4y^2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-x+\mu(y-x^2), \mu>0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y-x,\\ \frac{dy}{dt}=y-x^2-(x-y)\left(y^2-2xy+\frac{2}{3}x^3\right).\end{cases}$

4. 研究下列方程零解的稳定性：

(1) $\frac{d^3x}{dt^3}+5\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+x=0$;

(2) $\frac{dx}{dt}=\mu x-y, \frac{dy}{dt}=\mu y-z, \frac{dz}{dt}=\mu z-x$ (μ 为常数);

(3) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-y+z,\\ \frac{dy}{dt}=x-2y+2z,\\ \frac{dz}{dt}=x+2y+z.\end{cases}$

5. 某自激振动系统以数学形式表示如下(范德波尔方程):

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0(\mu>0),$$

试讨论系统的平衡状态(即驻定解)的稳定性态.

§6.2 V 函数方法

6.2.1 李雅普诺夫定理

前面讨论了数学摆的振动,当摆有阻力时可由其线性近似方程组决定它的稳定性.但当摆无阻力时,方程组(6.16)变成

$$\frac{dx}{dt}=y,\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x, \tag{6.19}$$

属于临界情形,不能按线性近似决定其稳定性态.为判断其零解的稳定性态.我们直接对方程组(6.19)进行处理.由方程可得

$$ydy=-\frac{g}{l}\sin x dx,$$

于是有

$$\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)=c,$$

这里 c 为任意非负常数

如果我们取函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x),$$

则此函数有性质:$V(0,0)=0$,而在原点邻近对任何不同时为零的 $x,y(|x|<\pi)$ 有

$$V(x,y)>0.$$

现在沿着方程(6.19)的解 $x=x(t),y=y(t)$ 对函数

$V(x,y)$取导数

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t}\\&=V_x(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+V_y(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{g}{l}y(t)\sin x(t)+y(t)\left(-\frac{g}{l}\sin x(t)\right)=0,\end{aligned}$$

这里 V_x, V_y表示函数 V 对 x, y 的偏导数. 由 t_0到 t 积分上式,得到

$$V(x(t),y(t))=V(x(t_0),y(t_0)).$$

从几何图形看,在 Oxy 平面上 $V(x,y)=V(x(t_0),y(t_0))=c$ 是一条曲线,其解 $x=x(t), y=y(t)$在这条曲线上. 由于 V 的性质,c 足够小时$V(x,y)=c$ 是围绕原点的一族闭曲线. 因此在没有阻力情况下的数学摆方程组(6.19)的零解是稳定的,但不是渐近确定的.

这样,借助构造一个特殊的函数 $V(x,y)$,并利用函数 $V(x,y)$及其通过方程组的全导数$\dfrac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}$的性质来确定方程组解的稳定性,这就是李雅普诺夫第二方法的思想. 具有此特殊性质的函数 $V(x,y)$称为李雅普诺夫函数,简称 V 函数.

现在讨论如何应用 V 函数来确定非线性微分方程组解的稳定性态问题. 为简单起见,我们只考虑非线性驻定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{6.20}$$

假设 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在某域 $G: \|\boldsymbol{x}\|\leqslant A$($A$ 为正常数)内有连续的偏导数,因而方程组(6.20)的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$所确定的解在域 G 内存在且唯一. 显然 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是其特解.

定义 2 假设 $V(\boldsymbol{x})$为在域$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$内定义的一个实连续函数，$V(\boldsymbol{0})=0$. 如果在此域内恒有 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，则称函数 V 为**常正的**；如果对一切 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $V(\boldsymbol{x})>0$，则称函数 V 为**定正的**；如果函数 $-V$ 是定正(或常正)的，则称 V 为**定负(或常负)**的.

进一步假设函数 $V(\boldsymbol{x})$关于所有变元的偏导数存在且连续，以方程(6.20)的解代入，然后对 t 求导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i,$$

这样求得的导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$称为函数 V 通过方程(6.20)的**全导数**.

例 1 函数

$$V(x,y)=(x+y)^2$$

是常正的；而函数

$$V(x,y)=(x+y)^2+y^4$$

是定正的；函数

$$V(x,y)=\sin(x^2+y^2)$$

在域 $x^2+y^2<\pi$ 上定正，在全平面上是变号的.

二次型函数

$$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2,$$

当 $a>0$ 且 $4ac-b^2>0$ 时是定正的；而当 $a<0$ 且 $4ac-b^2>0$ 时是定负的.

定理 4 如果对微分方程组(6.20)可以找到一个定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，其通过(6.20)的全导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$为常负函数或恒等于零，则方程组(6.20)的零解是稳定的.

如果有定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，其通过(6.20)的全导数$\frac{dV}{dt}$为定负的，则方程组(6.20)的零解是渐近稳定的.

如果存在函数 $V(\boldsymbol{x})$和某非负常数 μ，而通过(6.20)的全导数$\frac{dV}{dt}$可以表示为

$$\frac{dV}{dt}=\mu V+W(\boldsymbol{x}),$$

且当 $\mu=0$ 时，W 为定正函数，而当 $\mu\neq 0$ 时 W 为常正函数或恒等于零；又在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任意小邻域内都至少存在某个 $\overline{\boldsymbol{x}}$，使 $V(\overline{\boldsymbol{x}})>0$，那么，方程组(6.20)的零解是不稳定的.

证明 不妨假设定理中出现的定号函数和常号函数均在域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H\leqslant A$中有定义.下面分三部分来证明定理.

稳定性 任给正数 $\varepsilon<H$，由 $V(\boldsymbol{x})$的连续性和定正性知，必定存在

$$l=\inf V(\boldsymbol{x})>0,\text{对 }\varepsilon\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H.$$

又由 $V(\boldsymbol{0})=0$ 和 $V(\boldsymbol{x})$连续推知存在充分小的 $\delta<\varepsilon$，使对 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\delta$ 有 $V(\boldsymbol{x})<l$.

现在证明，对这样的 δ，只要 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$，则以 $\boldsymbol{x}_0$为初始向量的解 $\boldsymbol{x}(t)$对一切 $t\geqslant t_0$满足不等式

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon. \tag{6.21}$$

由解对 t 的连续性，不等式(6.21)至少对某个区间 $t_0\leqslant t<T$ 成立.因 $\varepsilon<H$，由定理条件有

$$\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt}\leqslant 0\ \text{ 或 }\ \equiv 0,$$

积分之，得

$$V(\boldsymbol{x}(t))-V(\boldsymbol{x}_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt}dt\leqslant 0\text{ 或}\equiv 0.$$

因此当 $t_0\leqslant t<T$ 时有

$$V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)<l, \tag{6.22}$$

这证明了在解满足不等式(6.21)的任意区间内,式(6.22)均成立.

如果式(6.21)不是对一切 $t\geqslant t_0$ 成立,则当 t 从 t_0 逐渐增大时必存在某一值 t^*,使 $t_0\leqslant t<t^*$ 时不等式(6.21)仍成立,但在 $t=t^*$ 有 $\|\boldsymbol{x}(t^*)\|=\varepsilon$,由于 $\varepsilon<H$,故式(6.22)在 $t=t^*$ 时仍成立,即

$$V(\boldsymbol{x}(t^*))<l,$$

但由 l 的定义,显然

$$\|\boldsymbol{x}(t^*)\|<\varepsilon.$$

这与原假设的 $\|\boldsymbol{x}(t^*)\|=\varepsilon$ 矛盾.故此 t^* 不存在,这就是说,解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对一切 $t\geqslant t_0$ 均满足不等式(6.21),即方程组(6.20)的零解是稳定的.

渐近稳定性　根据刚才的证明,当 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 定负时,显然零解是稳定的.现在就取稳定性证明中所确定的 δ 作为 δ_0,即取 $\delta_0=\delta$,因而当 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta_0$ 时 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<H$ 对一切 $t\geqslant t_0$ 成立.为了证明 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$,首先证明

$$\lim_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0. \tag{6.23}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$ 是定负函数,$V(\boldsymbol{x}(t))$ 对 t 是递减的,故存在极限

$$\lim_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=c.$$

如果 $c\neq0$,则对于任何 $t\geqslant t_0$,有

$$V(\boldsymbol{x}(t))>c.$$

又因 $V(\boldsymbol{x})$ 连续、定正,$V(\mathbf{0})=0$,故存在 $\lambda>0$ 使对于任何 $t\geqslant t_0$ 有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|>\lambda.$$

如果取

$$m=\sup_{\lambda\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t},$$

由于 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$ 为定负的,故 $m<0$,于是

$$V(\boldsymbol{x}(t))-V(\boldsymbol{x}_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\leqslant m(t-t_0),$$

即

$$V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)+m(t-t_0).$$

当 t 不断增大时，上式使函数 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 变为负数，这与 $V(\boldsymbol{x})$ 的定正性矛盾．因此，必须 $c=0$，即式(6.23)成立．

现进一步证明由式(6.23)可以推出

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0. \tag{6.24}$$

若上式不成立，则因零解稳定，解 $\boldsymbol{x}(t)$ 是有界的，故存在某一序列 $\{t_k\}(k=1,2,\cdots)$，$k\to\infty$ 时，$t_k\to\infty$，使

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t_k)\|=\|\boldsymbol{x}^*\|\neq 0.$$

于是根据函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的定正性，有

$$\lim_{k\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t_k))=V(\boldsymbol{x}^*)\neq 0,$$

这与式(6.23)矛盾．这证明式(6.24)成立，故零解是渐近稳定的．

不稳定性　由定理条件，不管 $\delta<H$ 怎样小，总存在 $\boldsymbol{x}_0$ 使 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 且 $V(\boldsymbol{x}_0)>0$．我们证明以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初始向量的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 必然走出域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 之外．若不然，则有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant H(\text{当 } t\geqslant t_0 \text{ 时}).$$

注意到 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 的表达式及对 W 的假设，当 $\mu\neq 0$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-\mu V\geqslant 0 \text{ 或} \equiv 0,$$

两边乘以 $\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)})\geqslant 0 \text{ 或} \equiv 0,$$

于是得

$$V(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}\geqslant V(\boldsymbol{x}_0),$$

即

$$V(\boldsymbol{x}(t))\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{e}^{\mu(t-t_0)}\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)>0,$$

只要取 t 足够大，则 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 可以任意大．

而当 $\mu=0$ 时，由 W 的定正性有

$$V(\boldsymbol{x}(t))-V(\boldsymbol{x}_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

同样得到

$$V(\boldsymbol{x}(t))\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)>0.$$

又因 $V(\boldsymbol{x})$连续、定正，$V(\boldsymbol{0})=0$，所以必存在 $\lambda>0$，使对任何 $t\geqslant t_0$，有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\geqslant\lambda$. 由于 $W(\boldsymbol{x})$是定正函数，于是存在正数

$$m=\inf_{\lambda\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x}),$$

这样一来，便有

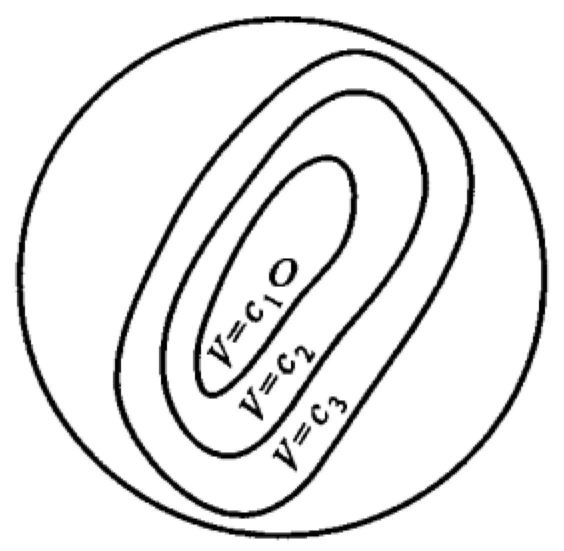
$$V(\boldsymbol{x}(t))-V(\boldsymbol{x}_0)=\int_{t_0}^{t}W(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t\geqslant m(t-t_0),$$

同样表明，只要取 t 足够大，则 $V(\boldsymbol{x}(t))$可以任意大. 这就与 $V(\boldsymbol{x})$于域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$连续，从而有界的结论矛盾. 因此，必定存在某个 $t^*>t_0$ 使 $\|\boldsymbol{x}(t^*)\|>H$，故零解是不稳定的. 定理证毕.

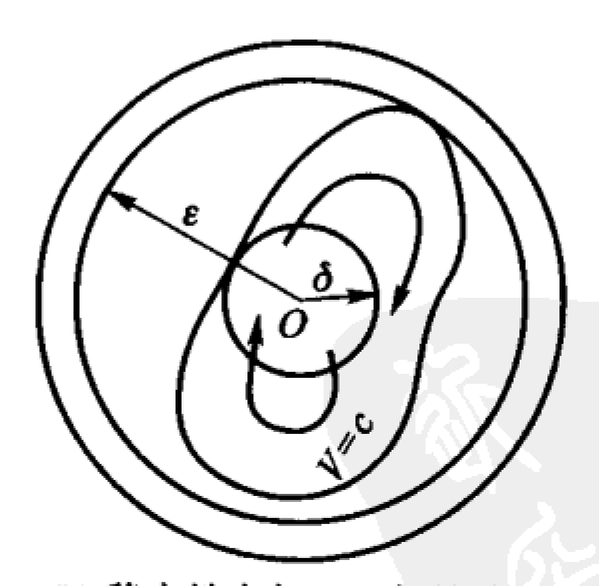
几何解释 在§1.2.1 中已指出，由未知函数组成的空间称为**相空间**，二维相空间又称**相平面**，微分方程的解在相空间中的轨迹称为**轨线**，轨线亦可定义为积分曲线在相空间中的投影. 我们以平面微分方程组为例，从相平面上轨线与 V 函数的关系来说明稳定性定理的几何意义. 作曲线族

$$V(\boldsymbol{x})=c\quad(c>0).\tag{6.25}$$

假定 $V(\boldsymbol{x})$为定正函数，即 $V(\boldsymbol{0})=0$，而当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时 $V(\boldsymbol{x})>0$，且 $V(\boldsymbol{x})$是连续的，这时当 c 足够小时，曲线族(6.25)是闭的，并且当 $c_1<c_2$时闭曲线 $V=c_1$整个闭包含在闭曲线 $V=c_2$之内，如图(6.3a)所示.



(a) $V=c$ 闭曲线族($c_1<c_2<c_3$)



(b) 稳定性态与 V 函数的关系

图(6.3) 稳定性几何解释

如果沿着轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 有 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，这意味着函数 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 对一切 $t\geqslant t_0$ 是 t 的不增函数. 因此，任何轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 将随着 $t\geqslant t_0$ 增加而一层层地进入闭曲线族(6.25)或者沿着这些曲线(整条曲线或某一段)运动. 始终不会由(6.25)的任一闭曲线的内部走到其外部去.

这样一来，对任意给定的正数 $\varepsilon < H$，在域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\varepsilon$ 内作出最大闭曲线 $V(\boldsymbol{x})=c$，并在这闭曲线内取以原点为中心的最大内接圆，其半径记为 δ，如图(6.3b). 则由域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\delta$ 内任何一点 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的轨线始终要停留在 $V=c$ 之内，自然更停留在域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\varepsilon$ 的内部，即 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$，所以零解是稳定的.

当 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 为定负的情形，则只允许轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 自外向内地进入曲线族(6.25)而渐近地趋于原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，不允许轨线在(6.25)中任一曲线上盘旋，此时零解是渐近稳定的.

不稳定的情形可类似讨论，这时轨线将自内而外地离开曲线族(6.25)而走出域 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$ 之外.

例 2 考虑平面微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+ax^3,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+ay^3, \tag{6.26}$$

这里其线性近似方程组的特征根为 $\lambda=\pm\sqrt{-1}$，属于临界情形.

如取定正函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，这时 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=a(x^4+y^4)$. 根据定理 4，依 a 的不同情况可得如下结论：

(1) 如果 $a<0$，则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 定负，方程组的零解为渐近稳定；

(2) 如果 $a>0$，则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 定正，方程组的零解为不稳定；

(3) 如果 $a=0$，则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\equiv 0$，方程组的零解稳定.

定理 4 是李雅普诺夫稳定性的基本定理，对含有时间 t 的非驻定的微分方程组及含有时间 t 的 V 函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 也有相应的定理，其证明方法仍然一样.但其条件及函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 的有关定义必须作一些改变，如 $V(t,\boldsymbol{x})$ 定正的含义是存在定正函数 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ 使 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$[14~16].

李雅普诺夫稳定性理论经过不断发展，可以在更广泛的条件下得到关于稳定性、渐近稳定性和不稳定性的结论.下面我们仅举出一个应用较广的关于渐近稳定性的判断.

定理 5 如果存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，其通过方程组(6.20)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 为常负，但使 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}=0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 的集中除零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 之外并不包含方程组(6.20)的整条正半轨线，则方程组(6.20)的零解是渐近稳定的.

定理 5 的证明与定理 4 的类似，由于定理条件，对轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 不会有 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\equiv 0$，故仍可以通过反证法证明 $\lim\limits_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0$，即有 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$.从几何意义上看，虽然 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}$ 常负，但因使 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}=0$ 的集中除零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 之外不含有整条正半轨线，故轨线不会永远停留在某一闭曲线 $V=c$ 上，它必然自外向内地逐层进入曲线族(6.25)而趋近原点.

例 3 现在让我们回到前面讨论过的数学摆的稳定性问题上.在§6.1 的例 1 中曾经指出，其一般的微分方程(6.15)可化为方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y. \tag{6.16}$$

如果取 V 函数为

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x),$$

则其全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu}{m}y^2.$$

当无阻力时，$\mu=0$，因而$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，根据定理 4，方程组(6.16)的零解是稳定的.这正如本节开头所讨论的.

当有阻力时，$\mu>0$，因而$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$为常负，如果根据定理 4 仅能得到稳定的结论.但由于使$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 的集是 $y=0$，而在原点邻域中$y=0$直线上除零解 $x=0,y=0$ 之外不含有方程组(6.16)的整条正半轨线，故可应用定理 5，而得到(6.16)的零解为渐近稳定的结论.这与§6.1的例 1 中通过线性近似详细分析得到的结论是一样的.

6.2.2 二次型 V 函数的构造

应用李雅普诺夫第二方法判断微分方程组零解的稳定性的关键是找到合适的 V 函数.如何构造满足特定性质的 V 函数是一个有趣而复杂的问题.这里考虑常系数线性微分方程组构造二次型 V 函数的问题，并利用它来补充证明按线性近似决定稳定性的定理 2.

定理 6 如果一阶线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{6.10}$$

的特征根 λ_i 均不满足关系 $\lambda_i+\lambda_j=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，则对任何负定(或正定)的对称矩阵 $\boldsymbol{C}$，均有唯一的二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}) \tag{6.27}$$

使其通过方程组(6.10)的全导数有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}), \tag{6.28}$$

且对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式

$$A^{\mathrm{T}}B + BA = C, \tag{6.29}$$

这里 $A^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}$ 分别表 A, B, C, x 的转置.

如果方程组(6.10)的特征根均具负实部,则二次型(6.27)是正定(或负定)的;如果(6.10)有正实部的特征根,则二次型(6.27)不是常正(或常负)的.

证明 我们首先证明对称矩阵 B, C 之间的关系式(6.29).由(6.27)和(6.10)有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}Bx + x^{\mathrm{T}}B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}B + BA)x,$$

与式(6.28)相比较便得到关系式(6.29).

注意到对称矩阵 B 只有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个未知元和矩阵 $A^{\mathrm{T}}B + BA$ 及 C 的对称性,矩阵方程(6.29)可以展开成 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个未知数的 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个方程的线性代数方程组.

下面我们证明这样的方程组的解是存在且唯一的,即满足关系式(6.29)的矩阵 B 可以唯一确定.于是,如果 C 是实矩阵,则唯一确定的矩阵 B 也是实的.

由定理条件,显然 $\lambda_i \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.根据线性代数方程组理论,存在这样的非奇异线性变换 $x = Uy$,将矩阵 A 化为标准形

$$U^{-1}AU = A^{*} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & d_3 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_3 & & d_n \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

这里 $d_i = 0$ 或 1.

我们用变换矩阵 U 及其转置矩阵 U^{T} 分别右乘及左乘(6.29)的两边,并利用关系式 $(U^{-1})^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}} = (UU^{-1})^{\mathrm{T}} = E$,就得到

$$U^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(U^{-1})^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}BU + U^{\mathrm{T}}BUU^{-1}AU = U^{\mathrm{T}}CU,$$

记 $C^{*} = U^{\mathrm{T}}CU, B^{*} = U^{\mathrm{T}}BU$,则上式可以化成

$$(A^{*})^{\mathrm{T}}B^{*} + B^{*}A^{*} = C^{*}. \tag{6.30}$$

由于标准形矩阵 A^{*} 的特性,显然展开上式可以得到

$$(\lambda_1+\lambda_j)b_{1j}^*+d_jb_{1,j-1}^*=c_{1j}^*(j=1,2,\cdots,n),$$

$$(\lambda_i+\lambda_j)b_{ij}^*+d_ib_{i-1,j}^*+d_jb_{i,j-1}^*=c_{ij}^*(i=2,\cdots,n;j=1,2\cdots,n),$$

这里记 $d_1=b_{i0}^*=0$,且 $b_{ij}^*,c_{ij}^*(i,j=1,2,\cdots,n)$分别为 B^*,C^* 的元.依照定理条件 $\lambda_i+\lambda_j\neq0$,我们可以逐个求解

$$b_{1j}^*=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_j}(c_{1j}^*-d_jb_{1,j-1}^*),j=1,2,\cdots,n,$$

$$b_{ij}^*=\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}(c_{ij}^*-d_ib_{i-1,j}^*-d_jb_{i,j-1}^*),i=2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n.$$

解出了矩阵 $\boldsymbol{B}^*$ 后便可以确定 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{U}^{-1}$.由于变换 $\boldsymbol{U}$ 是非奇异的,所以当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 时可以推得 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{0}$.依照定理条件 $\lambda_i+\lambda_j\neq0$,根据前面对方程组(6.30)的逐步求解式知道 $\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{0}$,因此 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.这说明了对于关系式(6.29),当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 时有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.利用这一性质容易证明满足关系式(6.29)的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是唯一的.事实上,假设存在两个矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 同时满足(6.29),则令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2$,显然由(6.29)得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$时关系式(6.29),于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2$,所以满足关系式(6.29)的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是唯一的.这就证明了定理的前半部分.

现在进一步证明当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具负实部时,二次型(6.27)是定正的.如果此结论不成立,则在原点邻域有 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使 $V(\boldsymbol{x}_0)\leqslant0$.考虑以此 $\boldsymbol{x}_0$ 为初始向量的方程组(6.10)的解 $\boldsymbol{x}(t)$,由于二次型(6.27)是定负的,沿着此解有

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Cx}(t)<0,$$

由此推得

$$V(\boldsymbol{x}(t))<V(\boldsymbol{x}(t_1))<V(\boldsymbol{x}_0)\leqslant0,\quad t>t_1>t_0.$$

另一方面,由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具负实部,根据第五章的定理 11,当 t 无限增大时解 $\boldsymbol{x}(t)$应趋于 $\boldsymbol{0}$,因而

$$\lim_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{0},$$

这与上面不等式相矛盾.这就证明了二次型(6.27)必须是定正的.

同样,当 $\boldsymbol{A}$ 有正实部的特征值时,二次型(6.27)必须不是常正的.假设(6.27)为常正,我们证明它将导致矛盾的结论.如果有 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$,使 $V(\boldsymbol{x}_0)=0$,则由于$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$定负,以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初始向量的(6.10)的解 $\boldsymbol{x}(t)$将使$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}<0$,因而 $V(\boldsymbol{x}(t))<0$(当 $t>t_0$),这与 $V(\boldsymbol{x})$为常正的假设矛盾,故实际上 $V(\boldsymbol{x})$

必须为定正函数.但原来已知$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$为定负,故由定理 4,可以确定方程组(6.10)的零解是渐近稳定的,这又与 **A** 有正实部的特征值,因而线性方程组(6.10)的零解将为不稳定的结论相矛盾.这就证明了二次型(6.27)不是常正的.定理 6 证毕.

例 4 考虑二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0,$$

经过变换$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$,化为平面线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x-3y,\end{cases}$$

其特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$.满足条件 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0,\lambda_1,\lambda_2\neq 0$.

依据定理 6,对定负对称矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,可以通过关系式(6.29)确定出二次型

$$V(x,y)=[x,y]\begin{bmatrix}b_1 & b_3\\ b_3 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

事实上,将矩阵 **C** 和矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1 & b_3\\ b_3 & b_2\end{bmatrix}$代入关系式(6.29),展开得三元线性代数方程组

$$\begin{cases}-4b_3=-4,\\ b_1-2b_2-3b_3=0,\\ -6b_2+2b_3=-1\end{cases}$$

解此方程组得到

$$b_3=1,\quad b_2=\frac{1}{2},\quad b_1=4,$$

这样我们就求得了二次型 V 函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}(8x^2+4xy+y^2).$$

容易验证,此二次型是定正的,且其通过线性方程组的全导数有

$$\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}=-(4x^2+y^2)=[x\quad y]\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},$$

这与定理 6 的结论相符.

定理 2 的证明 有了定理 6,我们便可以证明 §6.1 中的定理 2. 事实上,如果方程组(6.13)的线性近似方程组(6.10)的特征根 λ_i 满足 $\lambda_i+\lambda_j\neq0$,则可取矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为任一定负对称矩阵,例如可取为负单位矩阵 $-\boldsymbol{E}$,根据定理 6,存在二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\qquad(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B})\tag{6.31}$$

其通过线性微分方程组(6.10)的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

于是二次型(6.31)通过非线性微分方程组(6.13)的全导数有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))\\&=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}\tag{6.32}$$

利用关于 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ 的条件(6.14),只要取原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的足够小的邻域便可使在此域内有

$$\left|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right|<\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

这时由(6.32)便有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

即二次型(6.31)通过(6.13)的全导数是定负的.

因此,当(6.13)的线性近似方程组(6.10)的特征根均具负实部时,显然有 $\lambda_i+\lambda_j\neq0$,由定理 6 知二次型(6.31)是定正的. 又因 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 定负,故根据定理 4,非线性微分方程组(6.13)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是

渐近稳定的.

当(6.13)的线性近似方程组有正实部特征根时,我们考虑线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}, \tag{6.10}^*$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,μ 是某正实数.显然,矩阵 $\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}$ 的特征值等于$\lambda-\frac{\mu}{2}$,而 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.因此,只要 μ 取得适当小,使方程组(6.10)* 仍有正实部的特征根,且使任两个特征根之和均不为零.于是由定理 6 知对任意的定正对称矩阵,如 $\boldsymbol{E}$,存在不是常负的对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式(6.29),在此即有

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E},$$

或

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}.$$

这样一来,二次型(6.31)通过非线性方程组(6.13)的全导数有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))\\&=\mu V+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

在原点的足够小邻域内,$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$可取得使

$$W(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$$

仍为定正的.而由于二次型(6.31)不是常负的,即在原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任意小邻域内均有 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$ 使 $V(\boldsymbol{x}_0)>0$.因此,满足定理 4 中关于不稳定的条件,故方程组(6.13)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是不稳定的.至此定理 2 证毕.

李雅普诺夫创立了研究稳定性的一整套理论和方法,包括直接判别的第一方法和应用 V 函数判别的第二方法,这里只对 V 函数方法作了初步介绍.李雅普诺夫稳定性理论主要研究线性近似方程的特征值具零实部时的临界情形,包括一个或多个零根或纯虚根情形,此时必须通过高次项才能确定其稳定性态.

李雅普诺夫原来只考虑原点邻域的稳定性态，20世纪中随着控制理论的发展，需要考虑大范围（全局）稳定性问题．前苏联数学家引入无限大 V 函数的概念将李雅普诺夫稳定性理论推广到全空间．20世纪八九十年代，随着时滞、泛函、脉冲及时标等新的微分方程类型的提出，李雅普诺夫稳定性理论和方法也进一步发展用于解决相应类型微分方程的稳定性问题[14~16]．

习题 6.2

1．试判别下列函数的定号性：

(1) $V(x,y)=x^2$；

(2) $V(x,y)=x^2-2xy^2$；

(3) $V(x,y)=x^2-2xy^2+y^4+x^4$；

(4) $V(x,y)=x^2+2xy+y^2+x^2y^2$；

(5) $V(x,y)=x\cos x+y\sin y$.

2．试用形如 $V(x,y)=ax^2+by^2$ 的李雅普诺夫函数确定下列方程组零解的稳定性：

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-xy^2,\quad \dfrac{dy}{dt}=-yx^2$；

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-x+xy^2,\quad \dfrac{dy}{dt}=-2x^2y-y^3$；

(3) $\dfrac{dx}{dt}=-x+2y^3,\quad \dfrac{dy}{dt}=-2xy^2$；

(4) $\dfrac{dx}{dt}=x^3-2y^3,\quad \dfrac{dy}{dt}=xy^2+x^2y+\dfrac{1}{2}y^3$.

3．研究下列方程组零解的稳定性：

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-x-y+(x-y)(x^2+y^2)$,

$\dfrac{dy}{dt}=x-y+(x+y)(x^2+y^2)$；

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-y^2+x(x^2+y^2),\quad \dfrac{dy}{dt}=-x^2-y^2(x^2-y^2)$；

(3) $\dfrac{dx}{dt}=-xy^6,\quad \dfrac{dy}{dt}=y^3x^4$；

(4) $\frac{dx}{dt}=ax-xy^2$, $\frac{dy}{dt}=2x^4y$(a 为参数)；

(5) $\frac{dx}{dt}=ax-y^2$, $\frac{dy}{dt}=2x^3y$(a 为参数).

4. 给定微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-xf(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=-x-yf(x,y),$$

其中 $f(x,y)$有连续一阶偏导数.试证明在原点邻域内如 $f>0$ 则零解为渐近稳定的,而 $f<0$ 则零解不稳定.

5. 给定方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0,$$

其中 $f(0)=0$,而当 $x\neq 0$ 时 $xf(x)>0(-k<x<k)$.试将其化为平面方程组,并用形如

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(s)ds$$

的李雅普诺夫函数讨论方程组零解的稳定性.

6. 方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-x^3,\quad \frac{dy}{dt}=-2(x^3+y^5)$$

能否由线性近似方程决定其稳定性问题？试寻求李雅普诺夫函数以解决这方程组的零解的稳定性问题,同时变动高次项使新方程的零解为不稳定的.

7. 试将下列线性方程化成线性方程组,然后对方程组求二次型 V 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,使其通过方程组的全导数$\frac{dV}{dt}=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$,并判断函数 $V(\boldsymbol{x})$的定号性：

(1) $\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+9y=0$;

(2) $\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+y=0$.

8. 给定线性方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=5x_1-x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=3x_1+x_2,$$

试求出二次型 V 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,使其通过上述方程组的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2,$$

并判断函数 $V(\boldsymbol{x})$的定号性.

§6.3 奇　　点

下面我们转入介绍平面定性理论.在§1.2.1 中已介绍了相平面和奇点,在这里将详细讨论奇点的有关性质.考虑二维(平面)一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y),\end{cases}\tag{6.33}$$

假设 X,Y 对 x,y 有连续偏导数且 X^2+Y^2 不恒为零.可将方程组(6.33)改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\quad(X(x,y)\neq 0)\tag{6.34}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}\quad(Y(x,y)\neq 0).\tag{6.35}$$

由于$\dfrac{Y}{X}$或$\dfrac{X}{Y}$与 X,Y 同样有连续偏导数,因而满足解的存在唯一性定理的条件.方程(6.34)或(6.35)在 Oxy 平面的积分曲线可看成是方程组(6.33)在 Oxy 相平面上的轨线.因此在相平面上,方程组(6.33)的轨线不能相交.

同时满足 $X(x,y)=0,Y(x,y)=0$ 的点(x^*,y^*)是微分方程组(6.33)的奇点,$x=x^*,y=y^*$ 是方程组的解.可从通过坐标平移将奇点移到原点(0,0),此时,$X(0,0)=Y(0,0)=0$.

下面我们考虑驻定微分方程组是线性的情形下其轨线在相平面上的性态,并根据奇点邻域内轨线分布的不同性态来区分奇点的不同类型.这时方程的形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy.\end{cases}\tag{6.36}$$

显然,坐标原点 $x=0,y=0$ 是奇点.如果方程组的系数满足条件

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0,\tag{6.37}$$

则此奇点还是唯一的.下面的讨论将首先假定条件(6.37)成立.

根据线性代数理论可以通过非奇异的实线性变换

$$\begin{cases}\xi=k_{11}x+k_{12}y,\\ \eta=k_{21}x+k_{22}y,\end{cases}\tag{6.38}$$

把线性方程组(6.36)化成标准形式,其系数矩阵为下列四种形式之一:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix},$$

其中 λ,μ,α,β 为实数.这些标准形式是根据方程组(6.36)的特征方程

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0\tag{6.39}$$

的根(称为特征根)的性质来确定的.

事实上,不难直接验证:当特征根 λ_1,λ_2 是相异实根时,则可按 $b\neq 0$ 或 $c\neq 0$ 的不同情况,分别采用线性变换

$$\xi=(d-\lambda_1)x-by,\quad \eta=(d-\lambda_2)x-by$$

或

$$\xi=-cx+(a-\lambda_1)y,\quad \eta=-cx+(a-\lambda_2)y$$

把方程组(6.36)化为标准形式,其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$(在 $b=c=0$ 的情况

下,方程组(6.36)本身已是标准形式了);如果特征根是重根情形,即 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$,则当 $b\neq 0$ 或 $c\neq 0$ 时,分别采用线性变换

$$\xi=x,\qquad \eta=(\lambda-d)x+by$$

或

$$\xi=y,\qquad \eta=cx+(\lambda-a)y$$

即可将方程组(6.36)化为标准形式,其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$,而当 $b=c=0$ 时,原来方程已是标准形式,且其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ 形状;最后,特征根是复根的情形,注意到系数 a,b,c,d 均是实数,特征根 λ_1,λ_2 必然彼此共轭,即 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$,这时若令 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$,则线性变换

$$\xi=-cx+(a-\alpha)y,\qquad \eta=\beta y$$

或

$$\xi=(d-\alpha)x-by,\qquad \eta=\beta x$$

均能将方程组(6.36)化成标准形式,且其系数矩阵为 $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$.

由于线性变换(6.38)不改变奇点的位置,也不会引起相平面上轨线性态的改变,从而奇点的类型也保持不变.因此,为了简单起见,下面仅就标准形式的线性方程组讨论奇点的类型,至于一般方程组(6.36)在奇点邻域内轨线分布的图貌也同时附于相应的图中,以供比较.现按特征根为相异实根、重根或共轭复根,分五种情形进行讨论.

情形 I 同号相异实根 这时方程的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\lambda_1\xi,\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=\lambda_2\eta, \tag{6.40}$$

其解为

$$\xi(t)=A\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\quad \eta(t)=B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{6.41}$$

其中 λ_1,λ_2 为实特征根,而 A,B 是任意实常数.

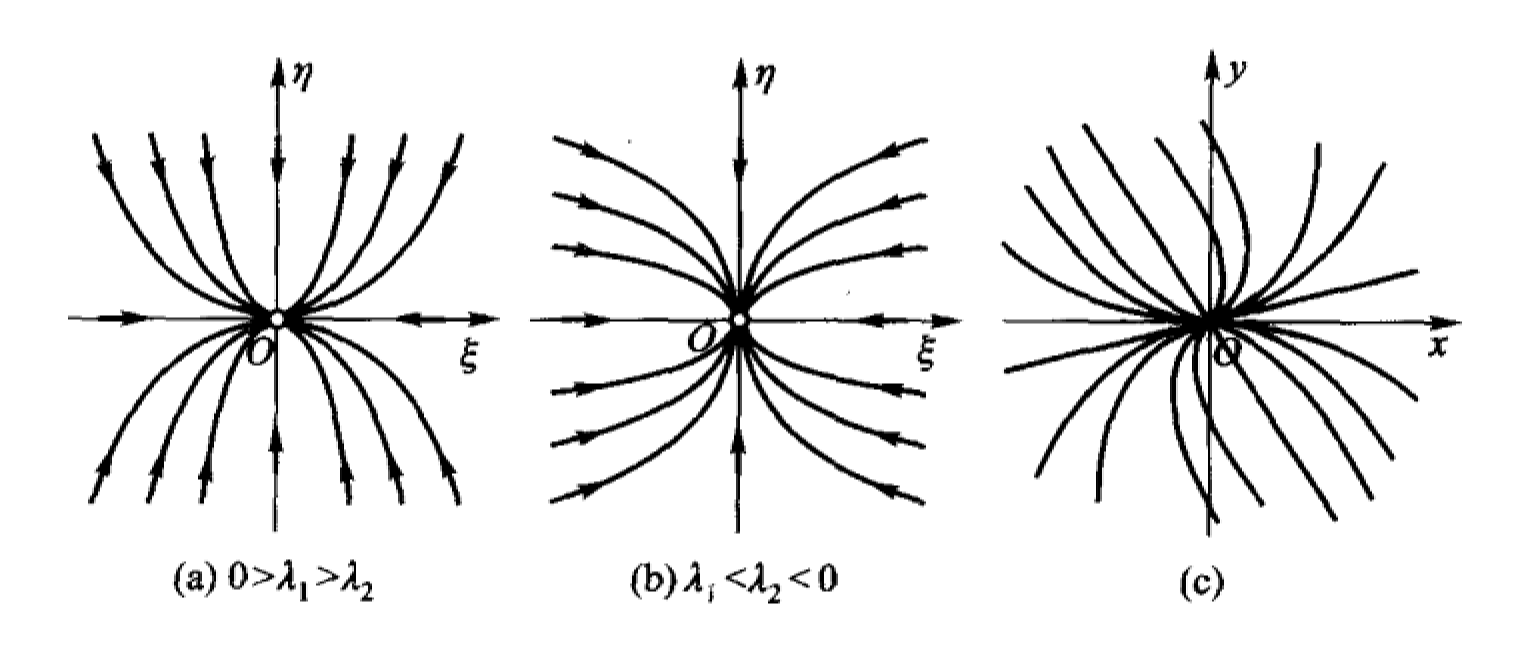
首先假定 λ_1,λ_2 同为负实数.此时易见,零解是渐近稳定的.当 $B=0$ 时,ξ 轴的左半轴及右半轴本身为轨线;而当 $A=0$ 时 η

轴的上半轴及下半轴亦为轨线．若 $A \cdot B \neq 0$，可分 $\lambda_1 > \lambda_2$ 和 $\lambda_1 < \lambda_2$ 两种情况．

如果 $\lambda_1 > \lambda_2$，由解(6.41)，在轨线上 t 时刻的切线斜率 k 有

$$k = \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \frac{B}{A} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \longrightarrow 0 \text{（当 } t \to +\infty\text{）},$$

故轨线切 ξ 轴于原点，相平面上轨线的形状如图(6.4a)所示．



图(6.4)　结点

如果 $\lambda_1 < \lambda_2$，则有

$$\frac{1}{k} = \frac{\xi(t)}{\eta(t)} = \frac{A}{B} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \longrightarrow 0 \text{（当 } t \to +\infty\text{）},$$

这表明轨线切 η 轴于原点，如图(6.4b)所示．

从图(6.4c)中可以看到，所有轨线趋于奇点，且除个别轨线外，它们在奇点处有公切线，其邻域内轨线具有这样性态的奇点称为**结点**．

如上所述，λ_1, λ_2 同为负实数时，方程的零解是渐近稳定的，我们称对应的奇点为**稳定结点**．

当 λ_1 和 λ_2 同为正实数时，上述讨论仍然有效，只需将 $t \to +\infty$ 改为 $t \to -\infty$，即图(6.4)中轨线的走向均须改为相反的方向，这时方程的零解为不稳定的，而对应的奇点称为**不稳定结点**．

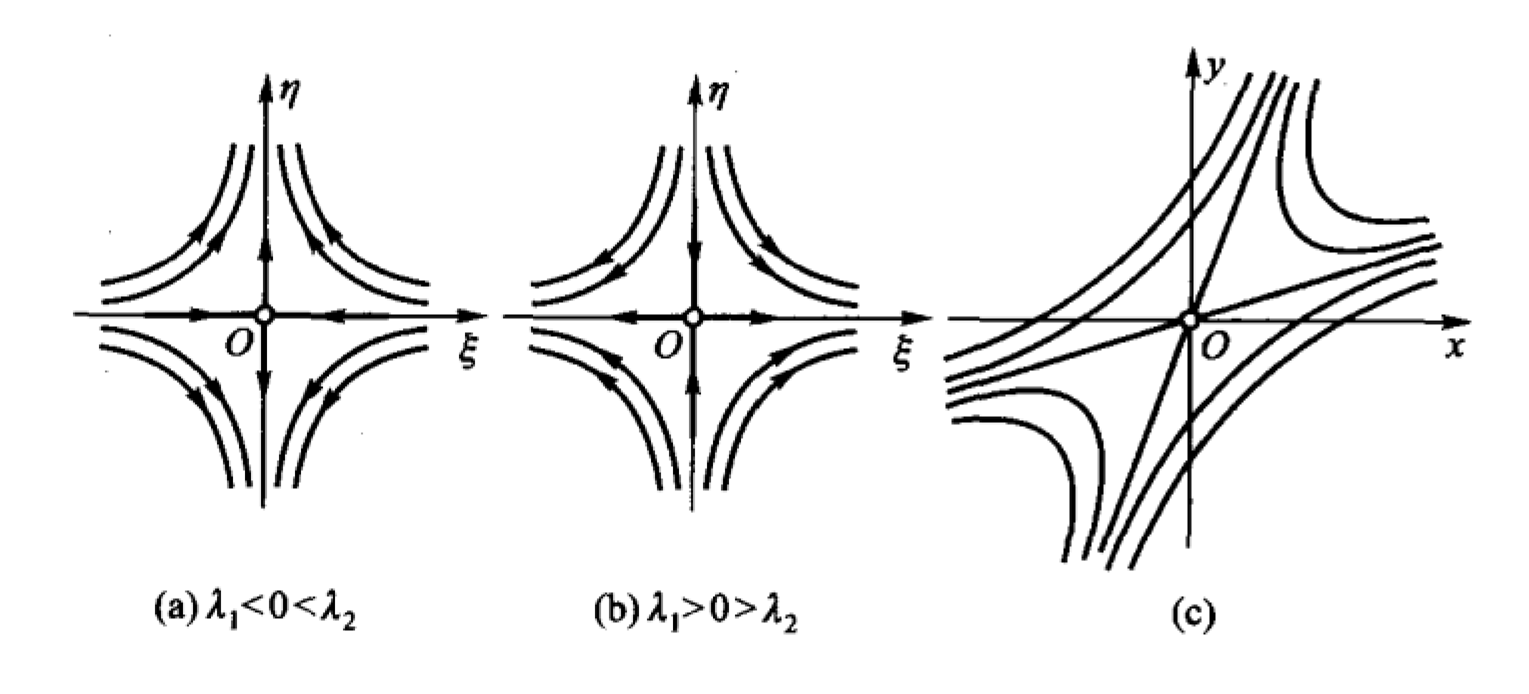
情形Ⅱ　异号实根　这时方程的标准形式及其解的表达式仍

为(6.40)和(6.41),不过其中 λ_1 和 λ_2 的符号相异.

解(6.41)中当 $B=0$ 或 $A=0$ 时其轨线分别为 ξ 轴的左、右半轴或 η 轴的上、下半轴,且其中一轴趋于原点,另一轴远离原点.

当 $A\cdot B\neq0$ 时,如 $\lambda_1<0<\lambda_2$,则由式(6.41)可知,当 $t\to+\infty$ 时,$\xi(t)\to0$, $\eta(t)\to+\infty$,轨线图貌如图(6.5a)所示.如 $\lambda_2<0<\lambda_1$,则有 $\xi(t)\to+\infty$, $\eta(t)\to0$(当 $t\to+\infty$),轨线形状如图(6.5b).

由图(6.5c)见到,在奇点邻域内,方程的轨线图貌如鞍形,这样的奇点称为**鞍点**.显然,鞍点只能是不稳定的.



(a) $\lambda_1<0<\lambda_2$　　(b) $\lambda_1>0>\lambda_2$　　(c)

图(6.5)　鞍点

情形Ⅲ　重根　这时可分两种情况讨论:

(1) $b\neq0$ 或 $c\neq0$.如前面所指出的,这时方程可化为如下标准形式

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda\xi+\eta,\quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda\eta, \tag{6.42}$$

其解为

$$\xi(t)=(At+B)e^{\lambda t},\quad \eta(t)=Ae^{\lambda t}, \tag{6.43}$$

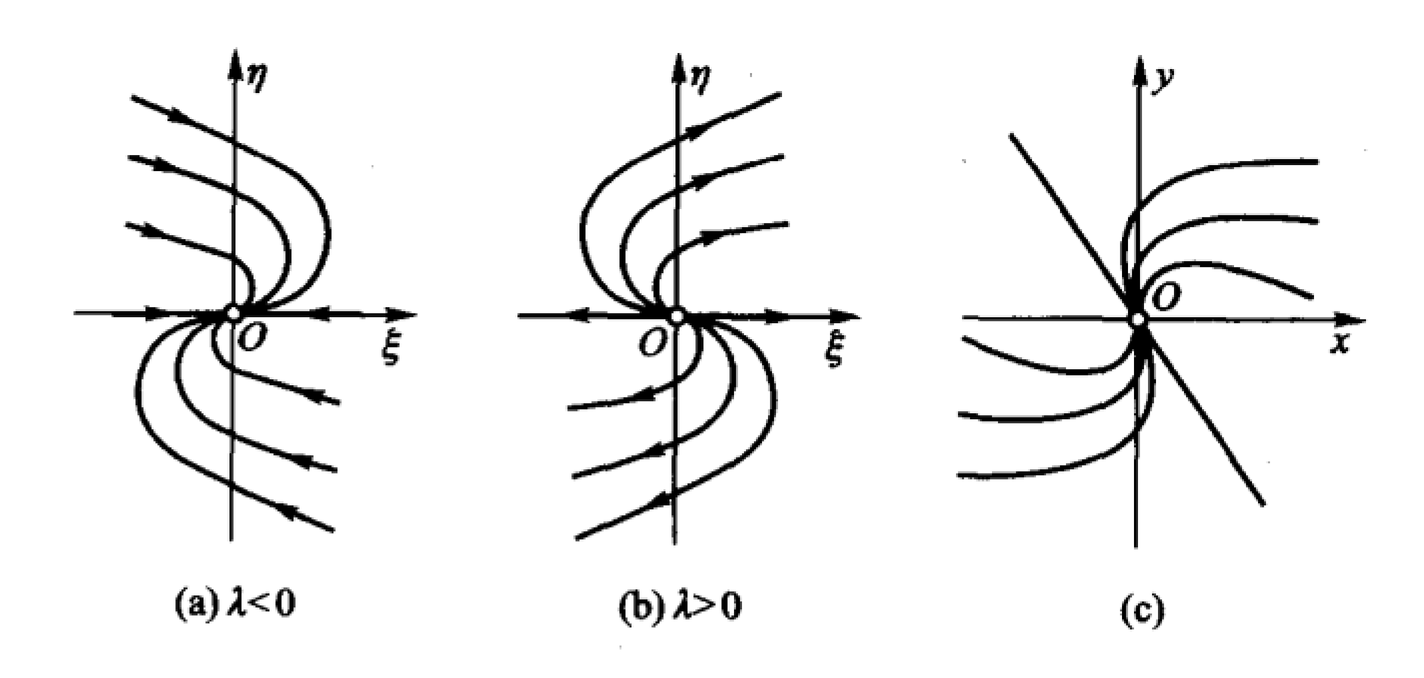
其中 λ 为实特征根,而 A,B 为任意实常数.

当 $\lambda<0$ 时，显然有 $\xi(t)\to 0$，$\eta(t)\to 0$（当 $t\to+\infty$），因而方程的零解是渐近稳定的. 又由(6.43)知，当 $A=0$ 时，ξ 轴左、右半轴本身也是轨线，而当 $A\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{A}{At+B}\longrightarrow 0（当\ t\to\infty）,$$

且当 $t=-\dfrac{B}{A}$ 时，$\xi(t)=0$，可知轨线越过 η 轴而切 ξ 轴于原点，如图(6.6a)所示. 所有轨线毫无例外地沿同一个方向（ξ 轴）趋于奇点，其附近轨线具有这种性态的奇点称为**退化结点**. 在些情形，奇点是稳定的，因此更称为**稳定退化结点**.

假若 $\lambda>0$，这时只要将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，则前面讨论仍然有效. 轨线性态如图(6.6b)所示，奇点是**不稳定退化结点**.



图(6.6) 退化结点

(2) $b=c=0$，这时方程组(6.36)取形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda y,\quad \lambda=a=d,$$

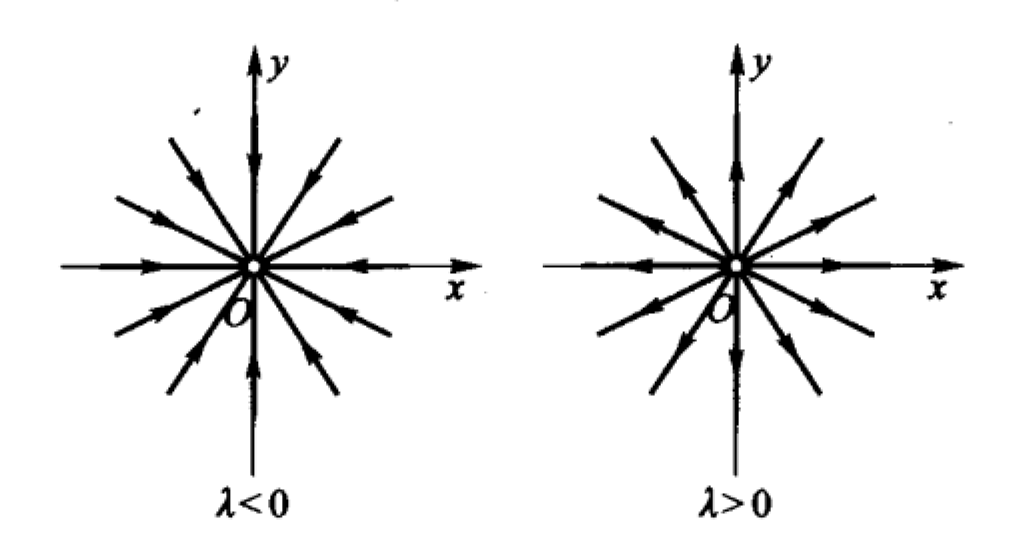
其解为

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\lambda t},\quad y(t)=B\mathrm{e}^{\lambda t},$$

于是

$$y=\frac{B}{A}x$$

此时,轨线是趋向(或远离)奇点的半射线,如图(6.7)所示.轨线均沿确定的方向趋于(或远离)奇点,且不同轨线其切向也异,这样的奇点称为**奇结点**,且 $\lambda<0$ 时为稳定的,而 $\lambda>0$ 时为不稳定的.



图(6.7) 奇结点

情形Ⅳ 非零实部复根 这时方程的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\alpha\xi+\beta\eta,\quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=-\beta\xi+\alpha\eta, \tag{6.44}$$

这里 α,β 分别为特征根的实部和虚部.引入极坐标,即令 $\xi=r\cos\theta,\eta=r\sin\theta$,再注意到

$$\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad \xi\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}-\eta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

则由(6.44)可以得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\alpha r,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\beta,$$

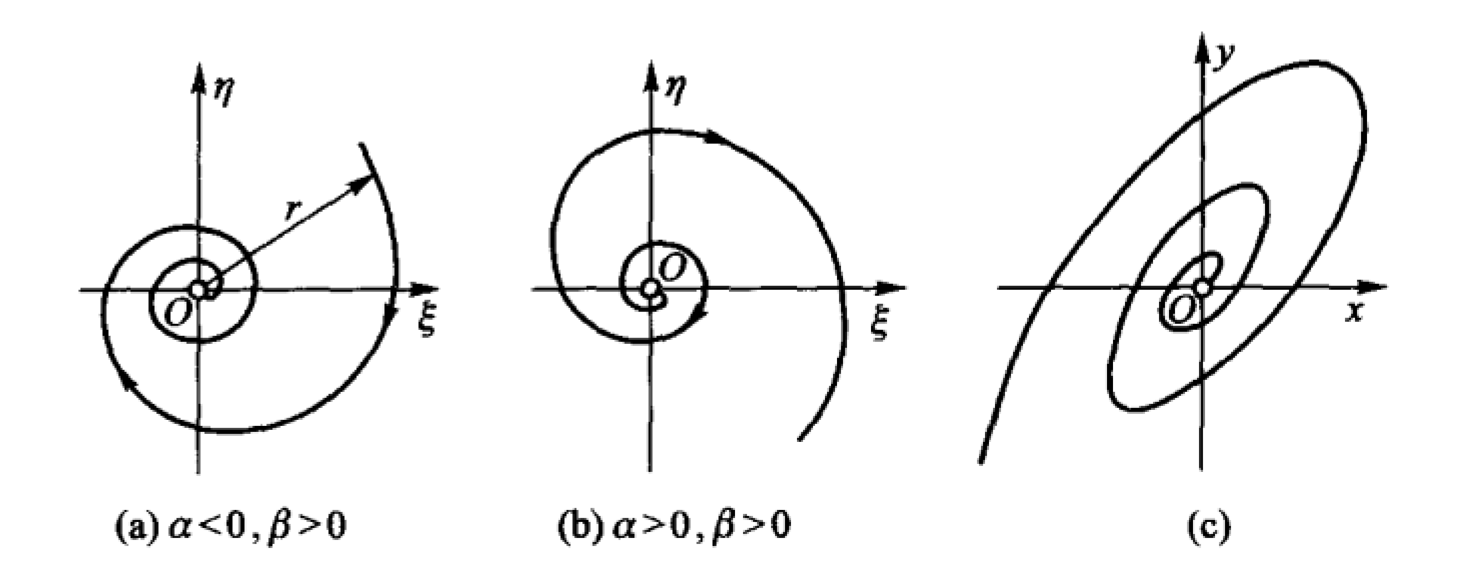
由此得到方程(6.44)的解的极坐标形式

$$r=A\mathrm{e}^{\alpha t},\theta=-\beta t+B, \tag{6.45}$$

其中 $A>0$ 和 B 为任意常数.

从(6.45)直接看出,轨线为一族对数螺旋线,依顺(逆)时针方向盘旋地趋近或远离原点,如图(6.8)所示.此时,奇点称为**焦点**,

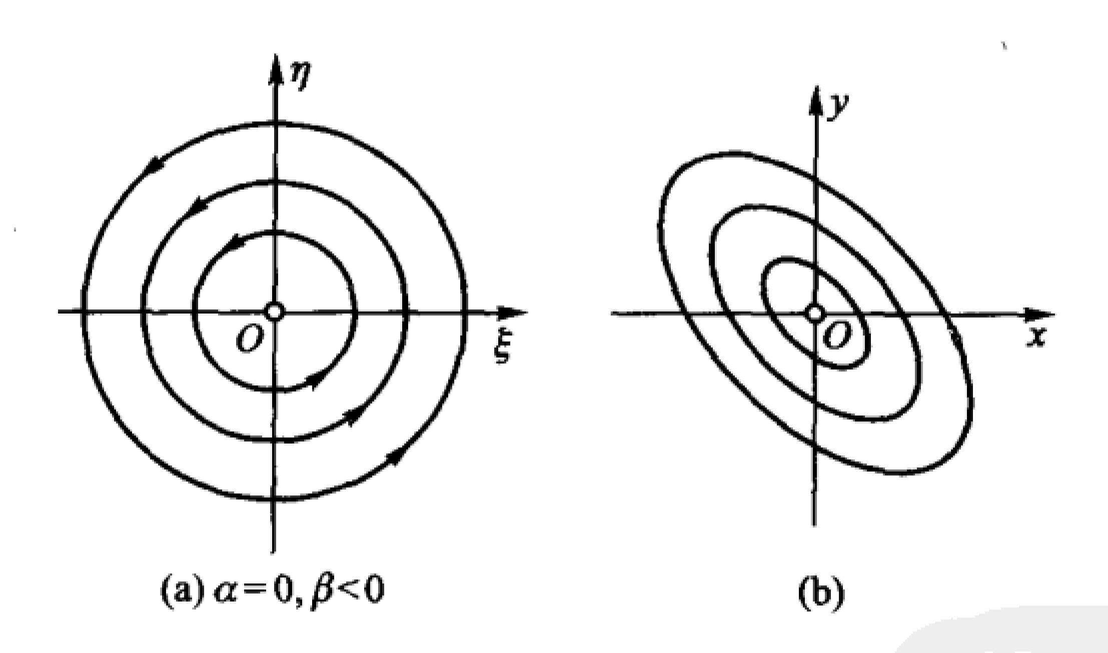
且 $\alpha<0$ 时为稳定的,而 $\alpha>0$ 时为不稳定的.



(a) $\alpha<0,\beta>0$　(b) $\alpha>0,\beta>0$　(c)

图(6.8)　焦点

情形Ⅴ　纯虚根　这相当于情形Ⅳ中 $\alpha=0$ 的情形.易见这时轨线为以原点为中心的一族圆,如图(6.9)所示.此时,奇点称为**中心**.显然,在这种情形下零解为稳定但非渐近稳定的.



(a) $\alpha=0,\beta<0$　(b)

图(6.9)　中心

综上讨论,可得下面定理:

定理 7　如果平面线性驻定方程组(6.36)的系数满足条件(6.37),则方程的零解(奇点)将依特征方程(6.39)的根的性质而分别具有如下的不同特性:

(1) 如果特征方程的根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为实根,则 $\lambda_1\lambda_2>0$ 时奇点为结点,且当 $\lambda_1<0$ 时结点是稳定的,而对应的零解为渐近稳定的,但当 $\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均是不稳定的;当 $\lambda_1\lambda_2<0$ 时奇点为鞍点,零解为不稳定的.

(2) 如果特征方程具有重根 λ,则奇点通常为退化结点,但在 $b=c=0$ 的情形奇点为奇结点.又当 $\lambda<0$ 时,这两类结点均为稳定的,而零解为渐近稳定的,但当 $\lambda>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的.

(3) 如果特征方程的根为共轭复根,即 $\lambda_1=\overline{\lambda}_2$,则当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1\neq 0$ 时奇点为焦点,且当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1<0$ 时焦点是稳定的,对应的零解为渐近稳定的,而当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的;当 $\mathrm{Re}\,\lambda_1=0$ 时奇点为中心,零解为稳定但非渐近稳定的.

上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系还可以用图来表出.例如,引入符号

$$p=-(a+d),\ q=ad-bc,$$

而将特征方程(6.39)写成

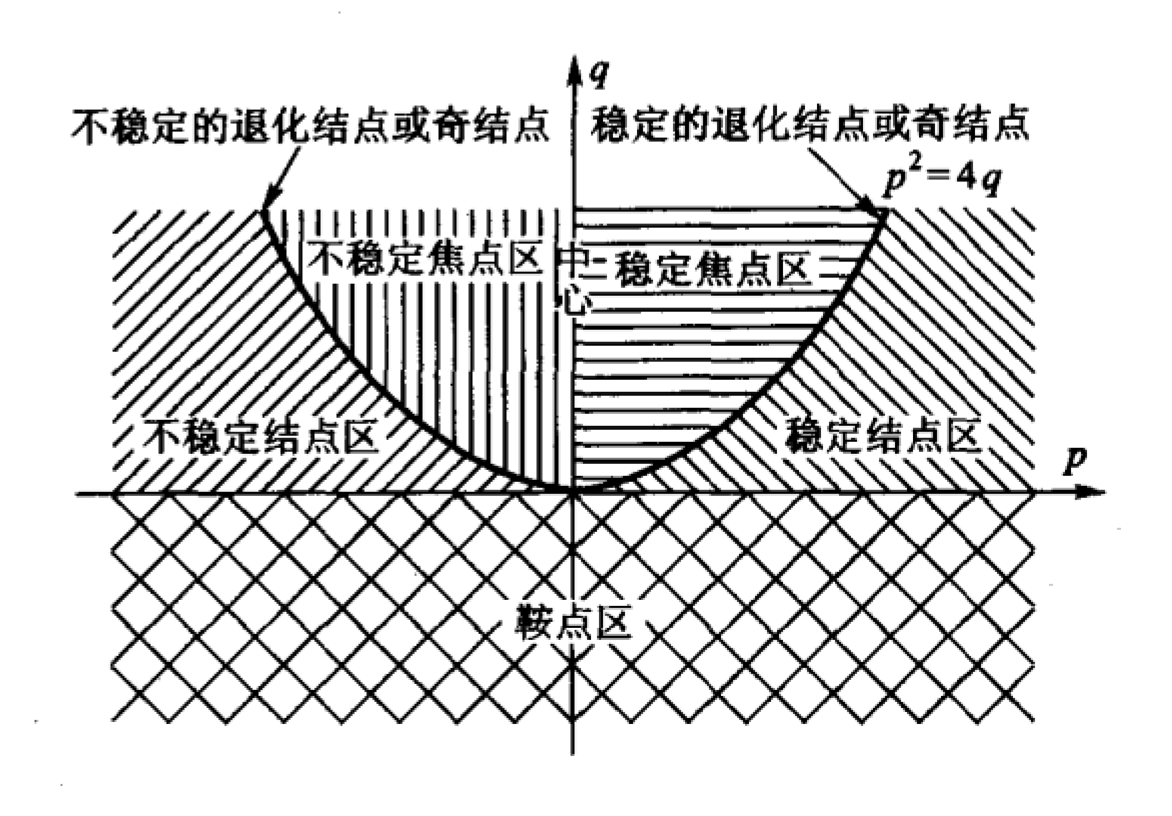
$$\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

则可以利用方程的根 λ_1,λ_2 与系数 p,q 之间的关系,通过 λ_1,λ_2 为媒介,在以 p,q 为直角坐标的平面(p,q)上明确地划分出各种类型奇点的分布区域,如图(6.10)所示(图中抛物线的方程为 $p^2-4q=0$).

例 1 考虑二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0,$$

通过变换 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$ 可将它化为下列方程组



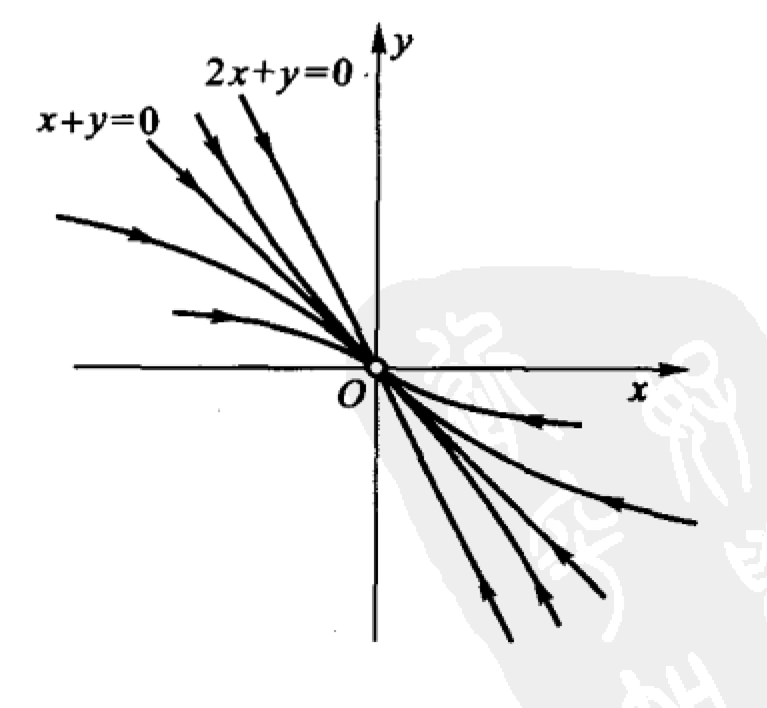
图(6.10)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x-3y.\end{cases}$$

由直接计算可得其特征方程的根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$,是一对相异负实根,根据定理 7 可知奇点是一个稳定结点.又 $\lambda_1>\lambda_2$,根据前面的讨论知道,在 $O\xi\eta$ 平面上于奇点附近轨线分布如图(6.4a)所示.为画出轨线在 Oxy 相平面上的图貌,必须根据线性变换(6.38)具体求出 ξ 轴和 η 轴在 Oxy 相平面上所对应的直线方程.在此,由前面的讨论,我们容易将它们写出如下

$$x+y=0 \text{ 和 } 2x+y=0.$$

由此不难画出轨线的图貌如图(6.11).



图(6.11)

在上面的讨论中假设条件(6.37)成立,即特征方程(6.39)没有零根的情形.现在我们来讨论特征方程有零根的情形.这时,特征方程(6.39)为

$$\lambda^2-(a+d)\lambda=0,$$

特征根为 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=a+d$.

由于 $ad-bc=0$,如果 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$,则方程组(6.36)可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by,\\ \dfrac{dy}{dt}=k(ax+by),\end{cases}\tag{6.36*}$$

这里 $k=\dfrac{c}{a}$ 或 $\dfrac{d}{b}$ 为常数.

此时直线 $ax+by=0$ 上任何点均为方程组的奇点,这样的直线称为**奇线**.

由(6.36)* 得到

$$\frac{dy}{dx}=k,$$

这表明在相平面上方程(6.36)* 的轨线是一族平行直线

$$y=kx+A,\tag{6.46}$$

其中 A 为任意常数.

现在讨论轨线的走向.由(6.36)*,我们有

$$\frac{d}{dt}(ax+by)=a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}=(a+bk)(ax+by)=\lambda_2(ax+by),$$

由此得到

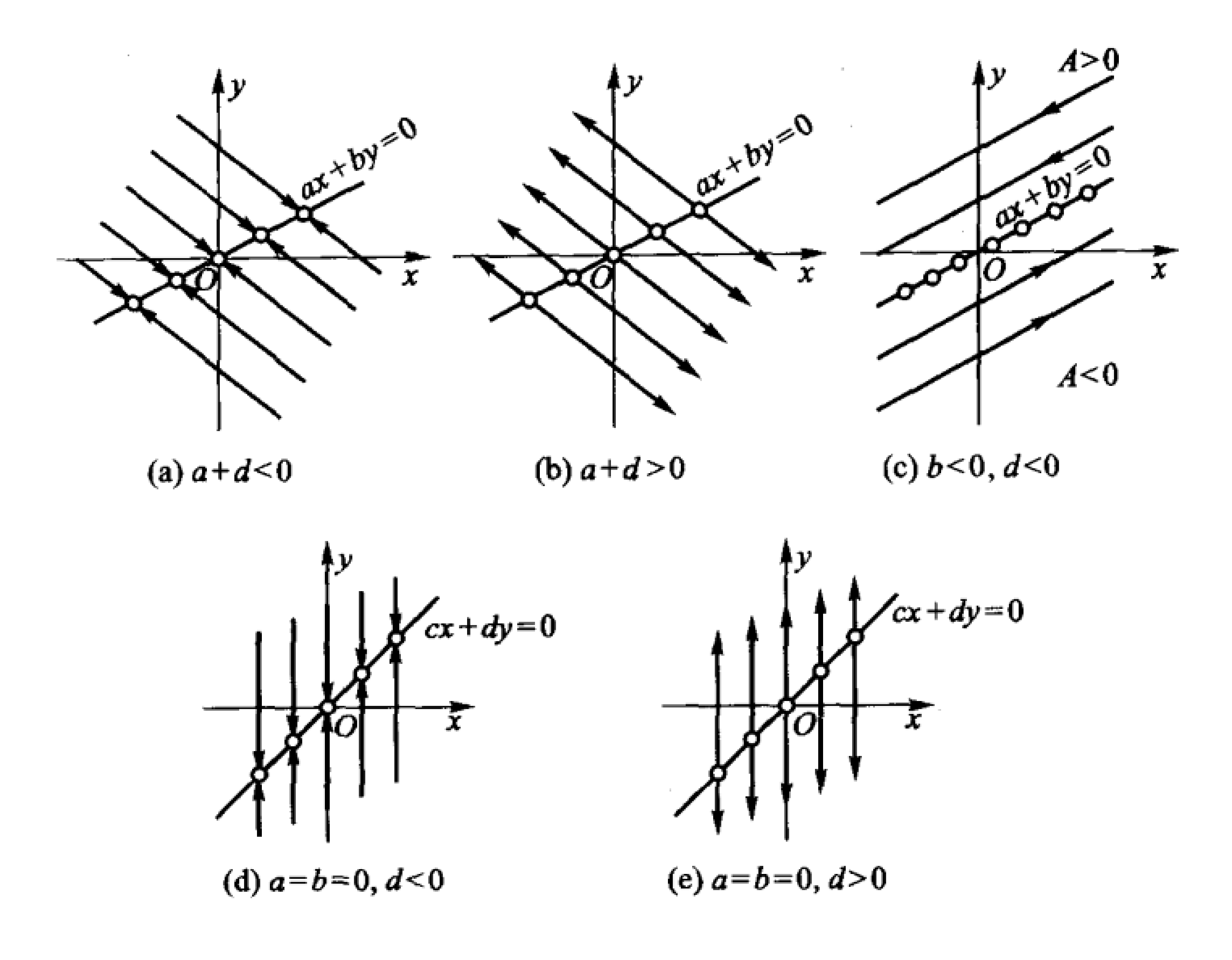
$$ax+by=Be^{\lambda_2 t},$$

这里 B 为任意常数.

由此看到,当 $\lambda_2<0$ 时轨线随着 $t\to+\infty$ 而趋于奇线上的某一点,如图(6.12a)所示;而当 $\lambda_2>0$ 时轨线的走向刚好跟上一情形取相反的方向,如图(6.12b)所示.

如果 $\lambda_2=0$ 即 $a+d=a+kb=0$,这时 $\lambda=0$ 是特征方程的重根.而奇线 $ax+by=b(y-kx)=0$ 同轨线(6.46)是平行的.将(6.46)代入(6.36)*,然后积分就得到

$$\begin{cases}x=bAt+C,\\ y=bkAt+D=dAt+D,\end{cases}$$



图(6.12) 奇线

这里 C,D 是积分常数.

由上式可以看出,轨线的走向将依赖于 b,d 和 A 的符号,例如当 $b<0$ 和 $d<0$,从而 $k>0$ 时,轨线分布如图(6.12c)所示.奇线 $ax+by=0$ 把相平面划分为两个区域,位于不同区域的轨线走向刚好相反.

如果 $a=b=0$ 但 $c^2+d^2\neq0$,则奇线是 $cx+dy=0$,轨线是 $x=E$,其中 E 为任意常数,即轨线平行于 y 轴,如图(6.12d,e).

当 $a=b=c=d=0$ 时显然奇点充满全平面.

上述讨论结果可概括为如下定理.

定理 7* 对于一阶线性方程组(6.36),如果其系数不全为零,则当特征方程(6.39)具有零根时,其在相平面上的轨线是一族平行直线.并且存在一条由奇点组成的直线——奇线,奇线通过原点而把相平面划分成为轨线不同走向的两个区域.当零根是单根时轨线随 $t\to+\infty$ 而趋近或远离奇线取决于 $a+d<0$ 或 $a+d>0$;当零根为重根时,轨线平行于奇线.如果线性方程组

(6.36)的系数全为零,则奇点充满全平面.

这一节我们详细讨论了平面线性驻定方程组(6.36)的轨线在相平面上的图貌.值得注意的是,轨线定义在整个相平面上,而积分曲线

$$x=x(t),y=y(t)$$

在整个平面上有定义,不管 t 取正的或负的任何值,解均有意义.这跟§6.1在稳定性定义中仅考虑 $t\geqslant t_0$ 的情况有所不同.

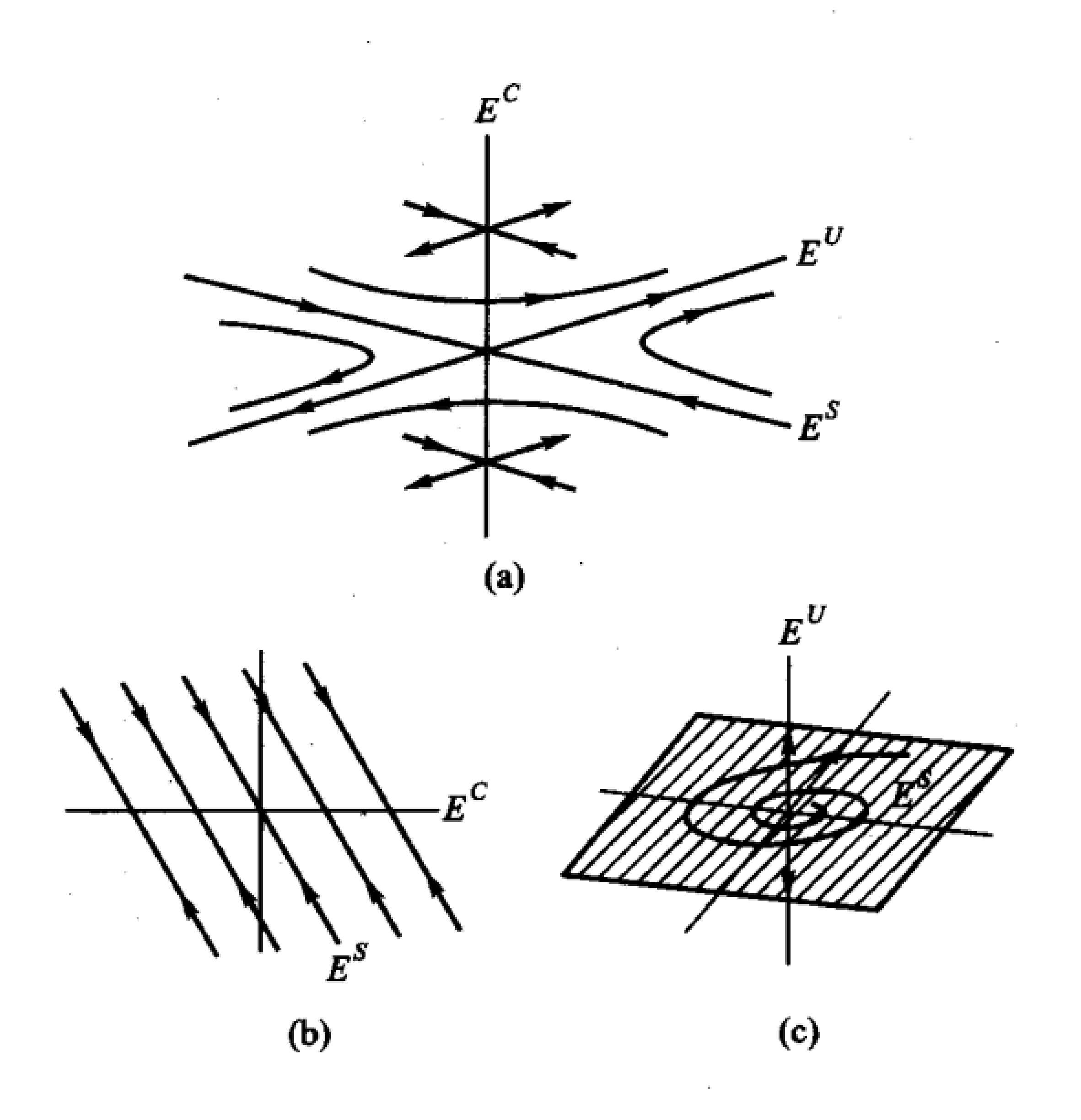
解对 t 可以在正或负方向上无限延伸的这种特性是下一节中讨论周期解和极限环问题的前提.

对高维线性孤立奇点实际上可按其特征根实部为负、正及零分为三种类型,分属三个空间 E^S,E^U,E^C.如特征根实部为负、正及零的个数分别为 k_-,k_+,k_0,则微分方程的解在 $n=k_-+k_++k_0$ 维相空间的奇点邻域存在由轨线组成的 k_-,k_+,k_0 维稳定、不稳定、中心三种流形 W^S,W^U,W^C.在稳定、不稳定流形上的轨线将正向、负向趋于奇点.如图(6.13),图(6.14)所示.其线性部分不含零实部特征根的奇点称为**双曲奇点**.

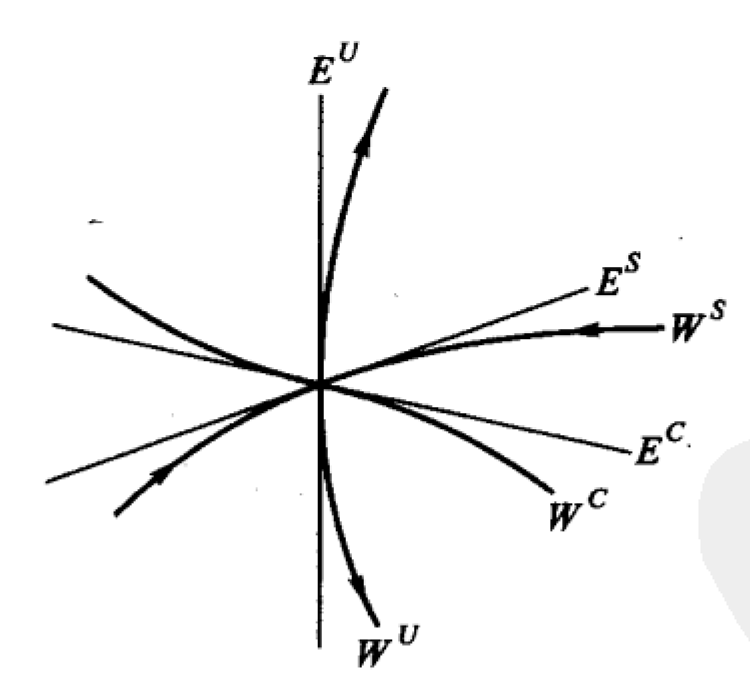
从稳定性理论中我们知道,中心属临界情形,其稳定性态要由更高次项才能确定.同样,对线性孤立双曲奇点方程组(6.13)在相平面上原点邻域的轨线图貌和方程组(6.10)相同.而对非双曲及非孤立奇点,则不能仅靠线性近似而需要和高次项一起分析.

平面上线性孤立奇点是中心时其非线性项的影响可使其轨线图貌是中心或是稳定或不稳定焦点,这个判别问题称为中心焦点判别.中心焦点判别可能需要经无限多次运算才能确定,能否用确定次数的运算判别中心焦点是一个尚待解决的问题.

对应于方程右端是高次多项式的微分方程组,其奇点称为**高次奇点**,一般把不能仅用线性项需要更高次项才能确定其轨线图貌的临界情形的奇点也称为高次奇点.相平面上高次奇点的轨线图貌更为复杂,可以利用极坐标变换将直角坐标(x,y)变为极坐



图(6.13)　E^S,E^U,E^C子空间



图(6.14)　W^S,W^U,W^C子流形

标(r,θ),再分析相平面上轨线是否及如何趋于原点及其走向,亦可以通过特殊变换进行处理[17].

习题 6.3

1. 试求下列线性方程组的奇点,并通过变换将奇点变为原点,进一步判断奇点的类型及稳定性:

(1) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-y+1,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-y-5;$

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-7y+19,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-2y+5.$

2. 试讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cy$$

的奇点类型,其中 a,b,c 为实常数且 $ac\neq 0$.

3. 对线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy,$$

其中 a,b,c,d 为实常数,记 $p=-(a+d),q=ad-bc,\Delta=p^2-4q$,

(1) 试用 p,q,Δ 的符号确定方程组的奇点的可能类型(鞍点,结点,焦点,中心);

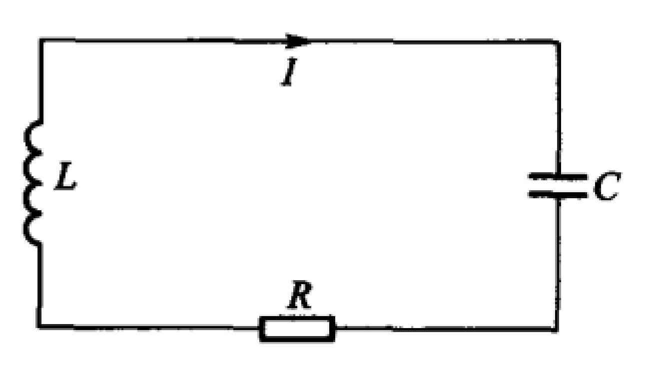
(2) 试用 p,q 的符号确定方程组零解的稳定性.

4. LRC 振动回路(如图(6.15)中电流变化规律满足微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=0$$

$$(L>0,R\geqslant 0,C>0),$$

试讨论这一系统的平衡状态(即方程的奇点)的可能类型.



图(6.15)

§6.4 极限环和平面图貌

6.4.1 极限环

对于平面常系数线性微分方程组的奇点,在§6.3中已作了

详细的讨论，对于孤立奇点，除了在中心型奇点邻域内轨线是一族围绕原点的闭曲线（对应于方程的周期解）外，其余的情形均是一端趋于奇点（$t\to+\infty$或$t\to-\infty$），另一端趋于无穷远（$t\to-\infty$或$t\to+\infty$）或两端都趋于无穷远的轨线，不存在其他的复杂情形.对于非线性微分方程组，我们仅在§6.1中利用线性近似方程组讨论了奇点邻域的轨线性态，至于全相平面的轨线图貌，情况就复杂多了.

例 1 对平面阶非线性驻定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y-x(x^2+y^2),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y-y(x^2+y^2),\end{cases}\tag{6.47}$$

如取极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则方程组(6.47)可化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(1-r^2),\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1.\tag{6.48}$$

由(6.48)可知当 $r=0$ 和 $r=1$ 时$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$，而$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1$，即有两个特解

$$r=0,\quad \theta=t_0-t,\quad t\geqslant t_0$$

及

$$r=1,\quad \theta=t_0-t,\quad t\geqslant t_0.$$

第一个解即为原点，是一奇点（易知它是不稳定焦点）；而第二个解在相平面上是半径等于1以原点为圆心的一个圆.这个以圆为轨线的解是一个周期解，周期为2π，轨线是沿着顺时针方向旋转的.

我们来看看除了前面的两个特解外，其余轨线的性态如何.在相平面上任意作一个半径为 $R>0$（圆心在原点）的圆，考虑通过 $r=R$ 圆上的任一点 (R,θ^*) 方程轨线的走向.

当 $R=R_1<1$ 时，由式(6.48)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=R_1}=R_1(1-R_1^2)>0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0,$$

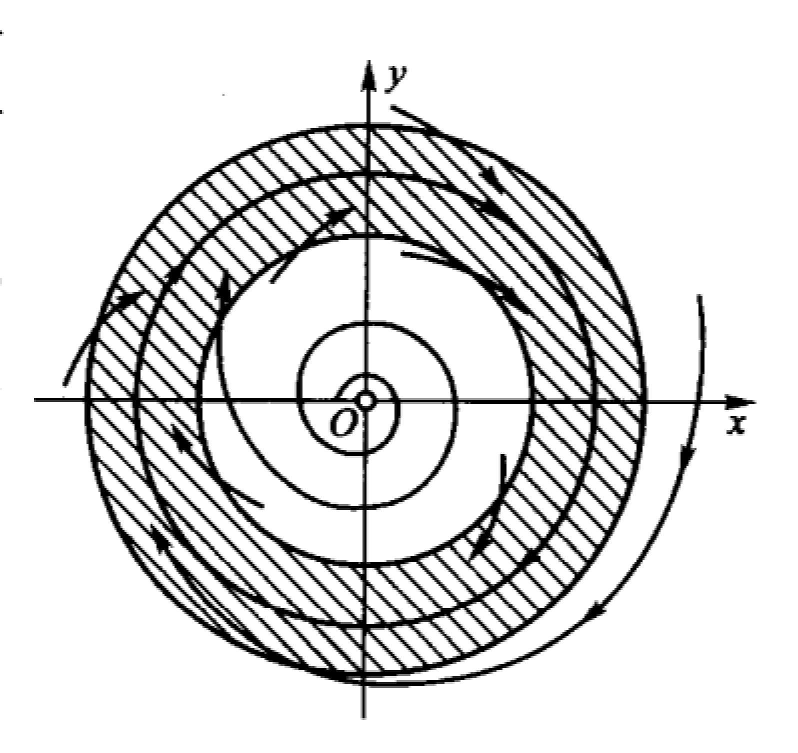
即轨线按顺时针方向从圆 $r=R_1$ 上走出圆外.

当 $R=R_2>1$ 时,则由(6.48)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=R_2}=R_2(1-R_2^2)<0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta^*}=-1<0,$$

即轨线按顺时针方向从圆 $r=R_2$ 上走进圆内.

考虑由 $R_1<r<R_2$ 组成的环域 D. 首先,由方程组(6.48)的右端可知,此环域 D 内没有方程的奇点. 其次,从前面的讨论知道,在边界 $r=R_1$ 和 $r=R_2$ 上所有的轨线均从环域 D 外进入 D 内,并不再走出环域 D,如图(6.16)所示.



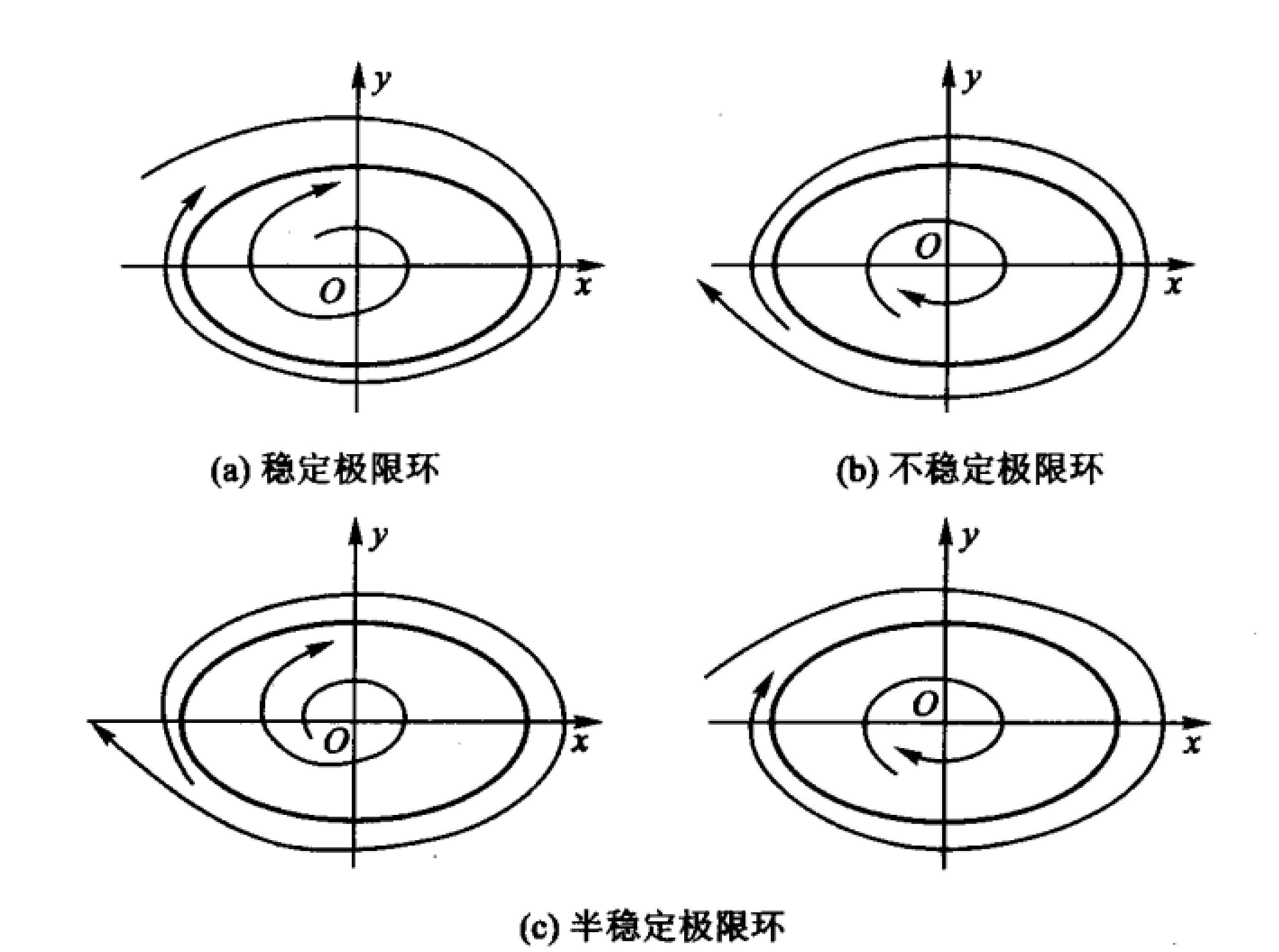
图(6.16) 极限环与环域 D

如果取 R_1, R_2 均足够接近 1,但仍有 $R_1<1<R_2$,则环域 D 的上述性质仍不变. 这就证明了圆 $r=1$ 所表示的特解是一个周期解(对应于闭轨线),其余的解(轨线)均趋近于此周期解(闭轨线).

这种孤立的周期解(闭轨线),在相平面上我们称为**极限环**. 当极限环附近的轨线均正向(即 $t\to+\infty$ 时)趋近于它时,称此极限环为**稳定的**. 如果轨线是负向(即 $t\to-\infty$)趋近此极限环,则称它为**不稳定的**. 当此极限环的一侧轨线正向趋近于它,而另一侧轨线负向趋近于它时,此极限环称为**半稳定的**. 稳定、不稳定和半稳定极限环的相图见图(6.17).

上例方程组(6.47)的解 $r=1$ 便是一个稳定的极限环(参看图(6.16)).

实际上可以不必先求出特解(如上例的 $r=1$),而仅仅由构造出的环域 D 便可以证明在此环域内必存在极限环. 这种构造特殊



(a) 稳定极限环

(b) 不稳定极限环

(c) 半稳定极限环

图(6.17)　极限环的稳定性态

环域来寻求极限环的方法称为**本迪克松(Bendixson)方法**，它是根据下面的定理得出的.

假设平面驻定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y),\tag{6.33}$$

其右端函数 X,Y 在相平面的某域 G 内有一阶连续偏导数.

定理 8　如果 G 内存在有界的环形闭域 D，在其内不含有方程组(6.33)的奇点，而(6.33)的经过域 D 上点的解 $x=x(t),y=y(t)$ 当 $t\geqslant t_0$(或 $t\leqslant t_0$)时不离开该域，则或者其本身是一个周期解(闭轨线)，或者它按正向(或负向)趋近于 D 内的某一周期解(闭轨线).

因此，只要能构造出一个有界的环形闭域 D，在其上没有奇点，且在其边界上轨线均进入(或离开)该域，自然，进入(或离开)

域 D 的解均不会再离开(或进入)域 D,则应用定理 8 可以肯定在域 D 内必存在周期解(闭轨线). 如果这周期解(闭轨线)是孤立的,那么它就是极限环. 这样,可以通过构造特殊的环域来寻求极限环,并大致确定其位置. 如果环域越狭小,则极限环的位置越准确. 例如上述例子中的环域 D,若取 R_1, R_2 足够接近 1,便可以确定极限环为圆 $r=1$ 而不必先寻求此特解.

通过构造有特殊性质的域 D 可以确定周期解(极限环)的存在,自然也提出这样的问题:能否通过构造具有别的特殊性质的域 D^* 来否定周期解(极限环)的存在呢? 下面给出一个判别准则.

定理 9 如果于 G 内存在单连通域 D^*,在其内函数 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$ 不变号且在 D^* 内的任何子域上不恒等于零,则方程组(6.33)在域 D^* 内不存在任何周期解,更不存在任何极限环.

现在用反证法利用格林(Green)公式来证明定理. 假设 D^* 内存在某周期为 T 的周期解

$$\Gamma: x=x(t), \quad y=y(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

则对于由 Γ 所围成的域 D_Γ(显然 $D_\Gamma\subset D^*$)有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_\Gamma (X\mathrm{d}y-Y\mathrm{d}x)\\ &= \int_0^T\left(X\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-Y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^T (XY-YX)\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

这与定理的假设矛盾,故在域 D^* 内不存在任何周期解更不存在任何极限环.

例 2 考虑§6.1 例 1 讨论过的数学摆,其微分方程(6.15)可化为平面微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y \quad (\mu>0). \tag{6.16}$$

我们有

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=-\frac{\mu}{m}<0,$$

于是应用定理 9 即可肯定方程组(6.16)不存在周期解.

由于稳定的极限环对应于物理上的周期振动情形,而不稳定的极限环则对应于物理上不能实现的周期振动,因此,对某类型方程讨论如何确定极限环及其稳定性态的问题是有其实际意义的.

物理学家范德波尔(van der Pol)研究过在无线电技术中有重要意义的等幅振动电子管电路,通过电路分析推导出微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\mu(x^2-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0, \tag{6.49}$$

并从数学上严格论证了实验所得的结论.一般称微分方程(6.49)称为**范德波尔方程**.

我们考虑更广泛的所谓李纳(Liénard)微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0, \tag{6.50}$$

如果记 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$,并设 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F(x)$,则方程(6.50)可化为平面微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-F(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x). \tag{6.51}$$

对于方程(6.50)或方程组(6.51),我们有下面的定理:

定理 10 假设

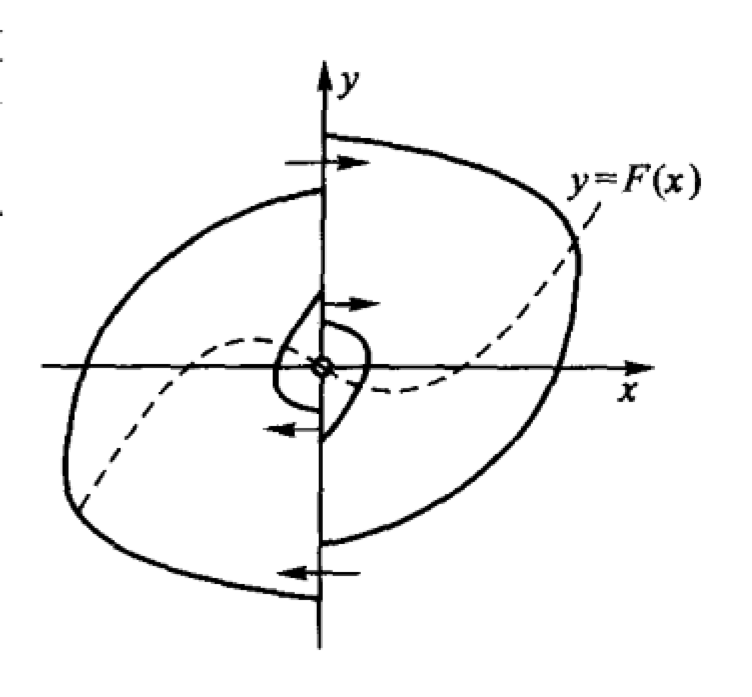
(1) $f(x)$及 $g(x)$对一切 x 连续,$g(x)$满足局部利普希茨条件;

(2) $f(x)$为偶函数,$f(0)<0$,$g(x)$为奇函数,当 $x\neq0$ 时 $xg(x)>0$;

(3) 当 $x\to\pm\infty$时,$F(x)\to\pm\infty$;$F(x)$有唯一正零点 $x=a$,且对 $x\geqslant a$,$F(x)$是单调增加的,

那么,方程(6.50)有唯一周期解,即方程组(6.51)有一个稳定的极限环.

在定理 10 的条件下，原点是唯一奇点，且相平面上轨线对于原点是对称的. 于是，定理 10 的一个证明方法是想办法构造一个环域 D，如图(6.18)，使经过其边界上的点的轨线只能进入此环域 D 内，并且不再越出域外. 这样利用定理 8 证明了存在一条闭轨线(周期解)，再进一步证明此闭轨线是唯一的，便得到存在唯一极限环的结论. 整个证明较为复杂，不在此详细介绍了[18].



图(6.18)

由于范得波尔方程(6.49)满足定理 10 的条件，故方程(6.49)或其等价的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-\mu\left(\frac{x^3}{3}-x\right),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x$$

存在稳定的极限环. 当 μ 很小时极限环接近于半径为 2 的圆，而当 μ 很大时，则极限环被"压扁"成一长条形，参看图(6.19).

极限环的研究，可以通过称之为 Poincaré 映射的方法进一步简化. 如图(6.20)，过极限环上一点 A 作一横截(无切)线段 l(n 维相空间则用 $n-1$ 维相平面)，过 l 上距 A 为 η(外法线方向为正)的点 B 的轨线绕一周后交 l 于距 A 为 η_1 的点 C，称 η_1 为 η 的 Poincaré 映射 P，而 $d(\eta)=\eta_1-\eta=P(\eta)-\eta$ 称为**后继函数**. 对平面轨线来说，线段 l 上 Poincaré 映射的不动点 $d=0$ 意味着是极限环. 通过线段上的 Poincaré 映射的后继函数可以判定极限环的存在与稳定. 当 $d(\eta)=0$ 时，过距 A 为 η 的点的轨线为极限环，$d'(\eta)<0(>0)$ 时，其极限环是稳定(不稳定)的，而 $d(\eta)=d'(\eta)=\cdots=d^{(k-1)}(\eta)=0, d^{(k)}(\eta)\neq 0$ 时，称其极限环是 k **重极限环**.

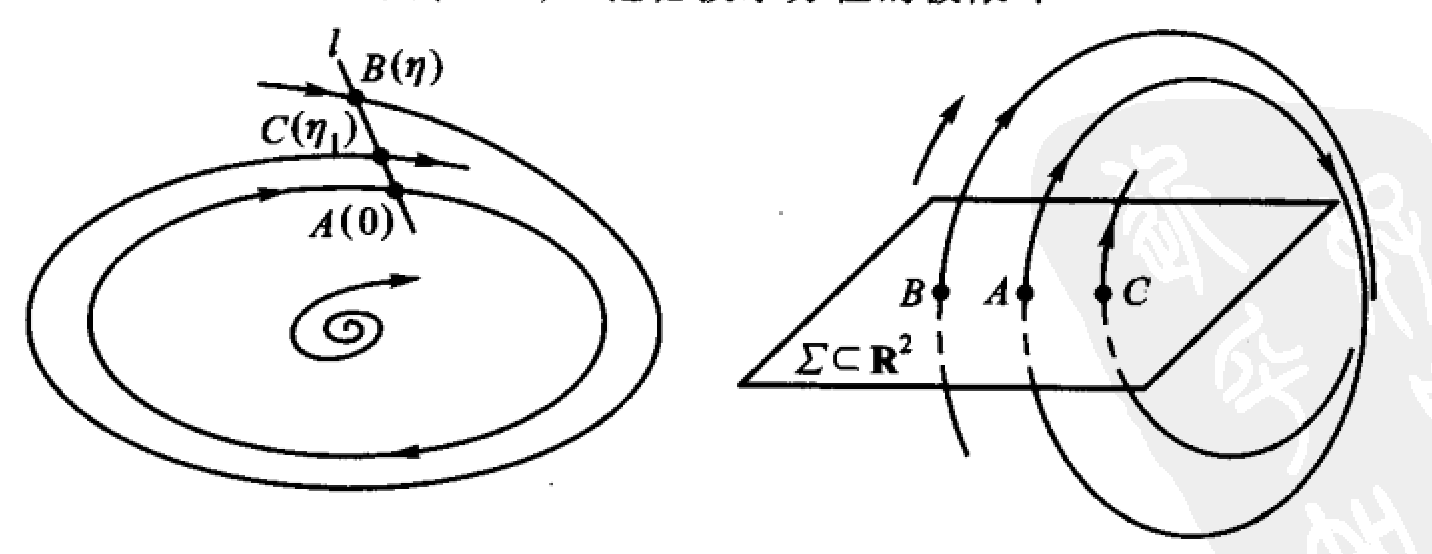
除极限环的存在性、稳定性及其重次外，还必须考虑极限环的个数问题. 即证明极限环是唯一的(唯一性)或明确有多少个极限环(唯 n 性). 这是一个困难的问题[18~20].

(a) $\mu=0.1$

(b) $\mu=1$

(c) $\mu=5$

图(6.19)　范德波尔方程的极限环



图(6.20)　Poincaré 映射

对方程右端是多项式的平面常微分方程多项式系统，其极限环的个数和相对位置的确定是希尔伯特第 16 问题的后半部分，其前半部分是关于平面代数闭曲线的个数和相对位置. 它们是希尔伯特在 20 世纪初提出的 23 个著名数学问题之一，经一百多年的努力，仍未得到解决.

6.4.2 平面图貌

奇点和极限环是相平面上两种特殊的轨线，我们希望在相平面上画出一般的轨线的图貌，以了解微分方程的解的性态. 在相平面画方向场是一种方法，另一种是等倾斜线法. 在 §1.2.1 中已介绍了方向场和轨线的等倾斜线以及垂直等倾斜线和水平等倾斜线.

对方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x,y), \end{cases} \tag{6.33}$$

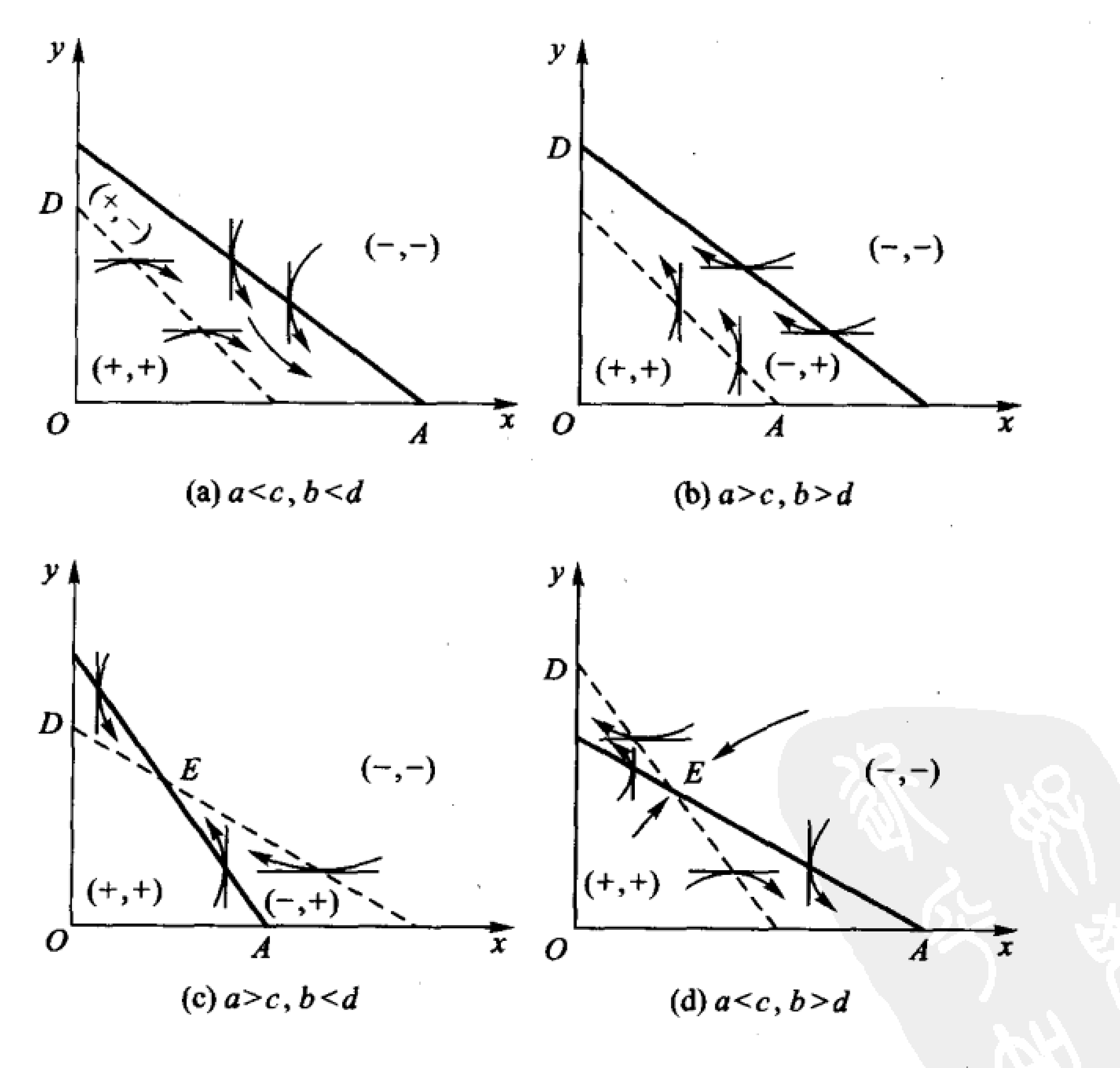
在相平面上曲线 $X(x,y)=0$ 和 $Y(x,y)=0$ 分别对应垂直等倾斜线和水平等倾斜线. 前者表示在相平面其曲线上的点的 x 方向是垂直方向 $\left(\dot{x}\equiv\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,\text{向上或向下}\right)$；后者表示在相平面其曲线上的点的 y 方向是水平方向 $\left(\dot{y}\equiv\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,\text{向右或向左}\right)$. 垂直等倾斜线和水平等倾斜线的交点为奇点，而两条曲线之间的区域内 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 不变号，即轨线方向在 90°范围内保持不变，故有(+，+)，(+，−)，(−，+)，(−，−)四种走向，其中括号内第一个 + 表向上、− 表向下，第二个 + 表向右、− 表向左. 利用等倾斜线可以基本确定微分方程的轨线在全相平面上的走向，从而画出方程在相平面上的轨线图貌.

现在我们用等倾斜线法分析 §1.1 例 5 中的两种群模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1 - ax - by), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sy(1 - cx - dy), \end{cases} \tag{6.52}$$

其中 r,a 和 s,d 分别反映种群 x 和 y 的增长情况，均为正常数．而 $b>0,c>0$ 时为竞争模型，$b>0,c<0$ 或 $b<0,c>0$ 时为被捕食－捕食模型，$b<0,c<0$ 时则为共生模型．

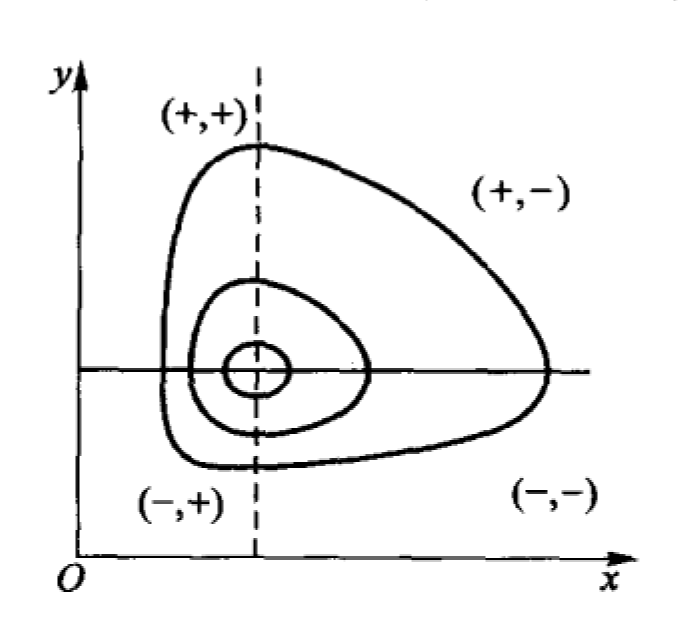
因 x,y 分别表示两种群的数量（或密度），故方程在相平面第一象限才有意义．实际上，对方程组(6.52)，$x=0$ 和 $y=0$ 分别表示的 y 轴和 x 轴是由整条轨线和奇点组成．由唯一性，第一象限上的轨线不能穿过它们跑到其他象限．因此，仅讨论第一象限上的



图(6.21)　平面竞争模型

轨线即可. $x=0$ 即相平面 y 轴上表示 x 种群绝灭, $y=0$ 即 x 轴表示 y 种群绝灭. 方程(6.52)的垂直和水平等倾斜线是 x 轴、y 轴和两条(在特殊情形下一条)直线. 对竞争模型,其相平面上的轨线图貌有四种情形,如图(6.21)所示,图中 O,A,D,E 点为奇点. 由图可知,在第一象限内(不含 x 轴、y 轴),有如下四种结果:(a) 当 $a<c,b<d$ 时,轨线将趋于 x 轴上 A 点, y 种群将绝灭;(b) 当 $a>c,b>d$ 时,轨线将趋于 y 轴上 D 点, x 种群将绝灭;(c) 当 $a>c,b<d$ 时,轨线将趋于 E 点(结点),两种群将按一定数量(比例)共存;(d) 当 $a<c,b>d$ 时,轨线将视位于何区域趋于 A 或 D 或 E 点, E 点为鞍点.

同样方法可分析被捕食-捕食模型和共生模型,但对被捕食-捕食模型在相平面上可能出现极限环、焦点或中心. 如对 Volterra 被捕食-捕食模型,由§2.1.1 例 2 所示的通解 $x^c e^{-dx} y^a e^{-by}=k$ 是首次积分式(见§7.2),实际上是一个哈密顿方程(见§6.6),其轨线是一族围绕奇点 E 的闭轨线,如图(6.22)所示.



图(6.22) 平面被捕食-捕食模型

对一般的两种群竞争模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=M(x,y)x,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=N(x,y)y,\end{cases}\tag{6.53}$$

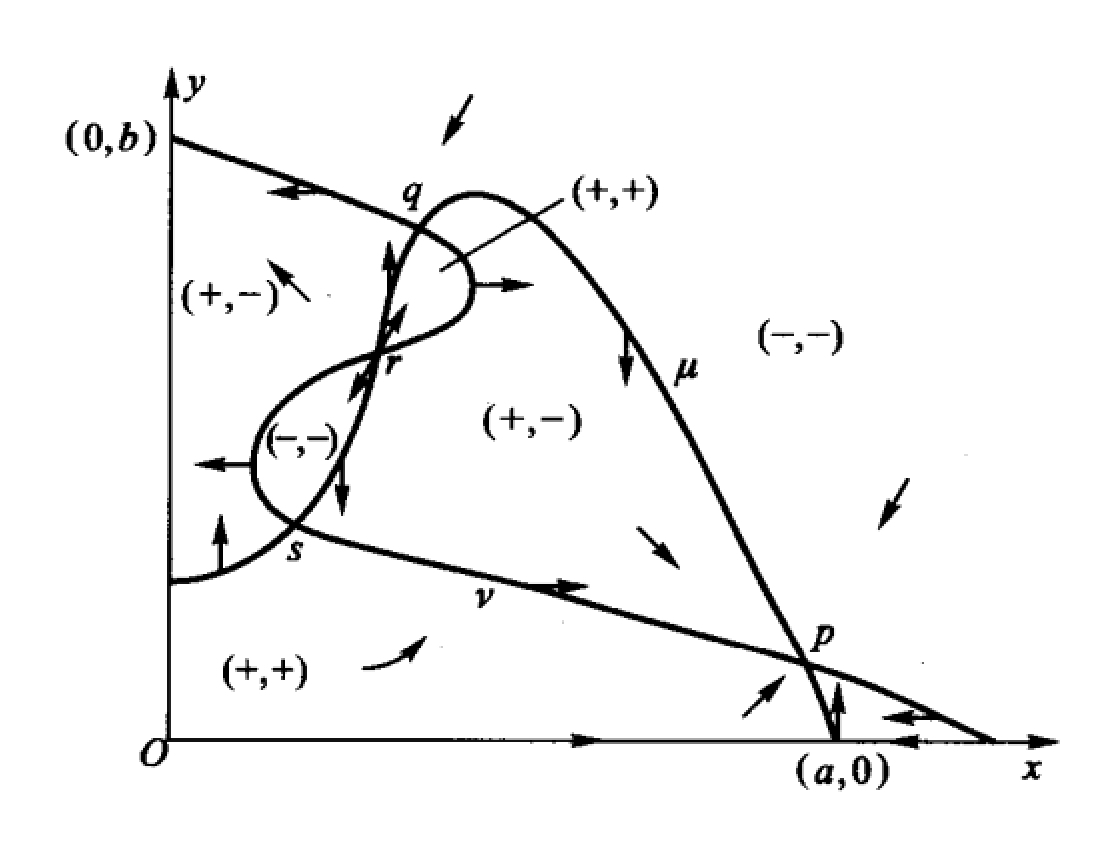
其中 x 与 y 的相对增长率 M 与 N 都是非负变量 x,y 的连续函数,有连续一阶偏导数,且一种群增长时另一种群的增长率下降,即 $\dfrac{\partial M}{\partial y}<0,\dfrac{\partial N}{\partial x}<0$,而任一种群过多时两种群都不能增长,故存在常数 $K>0$,当 $x\geqslant K$ 或 $y\geqslant K$ 时 $M(x,y)\leqslant 0$ 且 $N(x,y)\leqslant 0$. 还

设只有一种群时，它将按极限增长，即存在常数 $a>0, b<0$ 使得

当 $x<a$ 时，$M(x,0)>0$； 当 $x>a$ 时，$M(x,0)<0$；

当 $y<b$ 时，$N(0,y)>0$； 当 $y>b$ 时，$N(0,y)<0$.

在上述条件下，通过分析相平面上等倾斜线曲线 $M(x,y)=0$ 和 $N(x,y)=0$ 的形状及它们之间的关系，如图(6.23)所示，可以证明[1]



图(6.23) 平面一般竞争模型

定理 11 两种群竞争一般模型(6.53)的每一条轨线，当 $t\to\infty$ 时都趋于有限个平衡点之一.

现在讨论§1.1 例 7 中的分子化学动力学模型，对单分子化学动力学模型

$$\frac{dx}{dt}=-k_3x^3+k_2Ax^2-k_1x+k_0B, \tag{1.27}$$

方程右端是 3 次多项式，可根据多项式有 1,2 或 3 个实根情形将方程分解成如下两种形式：

$$\frac{dx}{dt}=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \quad 或 \quad \frac{dx}{dt}=a(x-x_1)(x^2+bx+c),$$

其中实根可以相同.实根为奇点，轨线只能在两奇点或奇点与正负无穷之间走向一奇点或正无穷或负无穷.根据初值在 x 轴上的位置即可判断其轨线

走向而不必费力求解微分方程.

双分子化学动力学模型(1.28)与 Volterra 被捕食－捕食模型没有区别，前面已分析过如图(6.22)所示.

考虑3分子化学动力学模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A-(B+1)x+x^2y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Bx-x^2y,\end{cases}\tag{1.29}$$

当 $A\neq0$ 时方程有唯一奇点 $N\left(A,\dfrac{B}{A}\right)$. 通过坐标平移 $\xi=x-A,\eta=y-\dfrac{B}{A}$ 化为(仍用 x,y 代替 ξ,η)

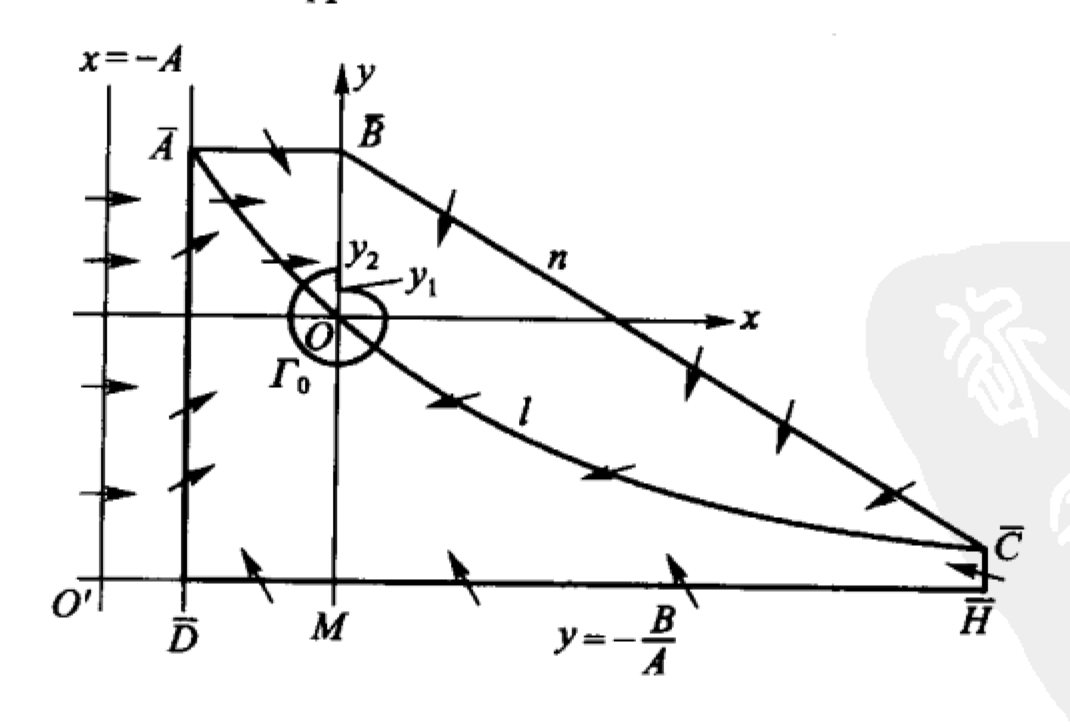
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(B-1)x+A^2y+\dfrac{B}{A}x^2+2Axy+x^2y=-x-G,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-Bx-A^2y-\dfrac{B}{A}x^2-2Axy-x^2y=G,\end{cases}\tag{6.54}$$

其中 $G=-(A+x)\left(\dfrac{B}{A}x+(A+x)y\right)$. 方程(6.54)的线性近似方程的特征方程为

$$\lambda^2-(B-A^2-1)\lambda+A^2=0.$$

易知当 $B\leqslant1+A^2$ 时,奇点 N 是渐近稳定的;而当 $B>1+A^2$ 时,奇点是不稳定的.

我们在方程(6.55)的相平面上构筑包围原点即奇点的环域 Γ,如图(6.24). 首先,因在 $y=-\dfrac{B}{A}$ 线上当 $x=-A$ 时,$\dot{x}>0$,而当 $x=0$ 时,$\dot{x}<0$,



图(6.24) 环域 Γ

因此为在 $y=-\frac{B}{A}$ 线找到一点$\overline{D}$，使得 $\dot{x}=0$，可联立求解三方程

$$x=kA,\quad -x-G=0,\quad y=-\frac{B}{A},$$

得 $k=\frac{-B}{1+B}$，即点$\overline{D}$坐标为$\left(\frac{-AB}{1+B},-\frac{B}{A}\right)$；于是在 $y=-\frac{B}{A}$ 线上点$\overline{D}$右端有 $\dot{x}\geqslant 0,\dot{y}>0$，轨线向上向左，再在 $x=-\frac{AB}{1+B}$ 线上求它与曲线 $l:\frac{B}{A}x+(A+x)y=0$ 的交点$\overline{A}\left(\frac{-AB}{1+B},\frac{B^2}{A}\right)$；在$\overline{D}\,\overline{A}$线上轨线向右，再过点$\overline{A}$作水平线交 y 轴于点$\overline{B}\left(0,\frac{B^2}{A}\right)$；$\overline{A}\,\overline{B}$线上轨线向下，再过点$\overline{B}$作直线 $n:y=-ax+\frac{B^2}{A}$，$(0<a<1)$ 交曲线 l 于点$\overline{C}$；$\overline{B}\,\overline{C}$ 线段上方向差为 $\delta=\frac{-ax+(1-a)G}{x+G}$，其分子小于零、分母最多 3 个零点，故 $\delta\neq 0$，而点$\overline{B}$上 $\dot{y}=-1$，线段上轨线向左向下，再过点$\overline{C}$作$\overline{C}\overline{H}$平行 y 轴，交直线 $y=-\frac{B}{A}$ 于点$\overline{H}$；在$\overline{C}\,\overline{H}$线段上轨线向左，这样由点$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{H}\,\overline{D}\overline{A}$围成了一个在边界上指向内部的闭域 Γ.

因原点是不稳定焦点，可在 y 轴上取 $y_1>0$ 且充分小时过点 $(0,y_1)$ 的轨线围绕原点一周后再交 y 轴于 $y_2>0$，因原点不稳定，显然 $y_2>y_1$，从点 $(0,y_1)$ 到点 $(0,y_2)$ 的轨线段与$\overline{y_2y_1}$直线段构成了包含原点的闭域 Γ_0，在 Γ_0 边界上的轨线均走出闭域 Γ_0. 这样在 Γ 边界和 Γ_0 边界之间便构成一个环域，内外环边界上的轨线均进入域内. 利用环域定理 8 便可得出如下结论：当 $A>0,B>1+A^2$ 时，Γ 内有一稳定的极限环，还可进一步证明极限环是唯一的；而当 $A>0,B\leqslant 1+A^2$ 时，Γ 内没有极限环.

在相平面分析中除奇点和极限环两种特殊轨线外，还有一种从奇点到奇点的轨线，这类轨线称为**分界线**. 如果一条分界线与一个奇点构成一个环，则称为**同宿环**(轨)；如果一条分界线两端是不同奇点，则分界线称为**异宿轨**；当多条分界线与多个奇点构成一个环时则称此环为**异宿环**. 上述定义中可以将奇点换为极限环. 如图(6.21)中的 OA，OD 都是分界线、异宿轨.

如果两个常微分方程的所有解之间存在一对一的对应(同胚)关系，且保接轨线定向，则可称这两个常微分方程是**拓扑等价**的.

驻定常微分方程表示为相平面上的向量场，点的方向为轨线在该点的切线方向.给定了一个平面驻定常微分方程，对与之非常接近的所有平面驻定常微分方程，可以用相平面上的点的向量非常接近来表示，如果它们是拓扑等价的，则称给定的常微分方程是**结构稳定**的.前苏联数学家安德罗诺夫(Andronov)和庞特里亚金(Pontryagin)曾给出[17,18]：

定理 12(结构稳定定理)　平面驻定微分方程(6.33)在平面有界区域上结构稳定的充要条件是

(1) 只有有限个奇点，且均为双曲的；

(2) 只有有限个闭轨，且均为单重极限环；

(3) 没有鞍点之间的分界线.

对二维驻定微分方程即平面动力系统，要分析在相平面上的全局轨线图貌.如果不是全局渐近稳定或有界即轨线都向里走，还必须考虑轨线如何趋向无穷，即无穷远处的轨线图貌，这可以通一种特殊变换(称为 Poincaré 变换)将无穷远化为原点进行分析.将有限区域的分析和无穷远分析结合起来，便可得到一个方程的全局图貌[17~21].

习题 6.4

1. 试确定下列方程组的周期解、极限环，并讨论极限环的稳定性：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y - x(x^2+y^2-1)^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y(x^2+y^2-1)^2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2-1), \end{cases}$　　当 $x^2+y^2 \neq 0$,

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0,$　　当 $x^2+y^2=0$;

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) - y(x^2+y^2-4), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) + x(x^2+y^2-4). \end{cases}$

2．试判别下列方程组有无极限环存在：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + \dfrac{1}{3}x^3 - y^2 x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + yx^2 + \dfrac{2}{3}y^3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - 2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + x^3 - x^2 y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + y^3. \end{cases}$

3．考虑方程组

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y),$$

其中函数 $X(x,y)$, $Y(x,y)$在单连通区域 D 内有连续偏导数.假设存在函数 $B(x,y)$,其一阶偏导数于域 D 内连续,且

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY)$$

不变号和不恒等于零,试证明上述方程组于域 D 内不存在任何周期解.

4．证明方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + ax + b\frac{dx}{dt} - \alpha x^2 - \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

没有极限环存在,其中 a, b, α, β 为常数,且 $b \neq 0$.(提示:利用上题结果.)

5．证明下列方程(组)存在唯一的稳定极限环：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - x^5 - 3x^2 y; \end{cases}$

(2) $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \alpha(x^{2n} - \beta)\dfrac{dx}{dt} + \gamma x^{2m-1} = 0$($\alpha, \beta, \gamma$ 为正常数,n, m 为正整数).

6. 试用等倾斜线法在相平面上画出下列方程的轨线图貌：

(1) $\dot{x}=x(1-x-2y),\dot{y}=y(x-2-y)$；

(2) $\dot{x}=x(1-x+y),\dot{y}=y\left(x-2-\frac{1}{2}y\right)$；

(3) $\dot{x}=xy,\dot{y}=y^2+x^4$；

(4) $\dot{x}=xy,\dot{y}=y^2-x^4$；

(5) $\dot{x}=xy-x^3,\dot{y}=y^2-2x^2y+x^4$.

7. 试详细讨论两种群模型(6.52)中的被捕食－捕食模型的各种情形.

*§6.5 分支与混沌

6.5.1 常微分方程单参数分支

考虑含参数的常微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m,\dot{x}\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{f}\in C^r,\qquad(6.55)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 为参数. 最普通的参数是方程的系数作为参数. 对含参数的微分方程，我们特别关注的是当参数变化时方程的解特别是平衡解的个数和性态是否发生变化，即方程是否结构稳定. 这便是微分方程解的分支（亦称分歧、分岔）问题. 相对于某参数值 $\boldsymbol{\lambda}$ 方程(6.55)不是结构稳定时称此方程为分支方程，对应的参数值 $\boldsymbol{\lambda}$ 称为分支值. 在这里，我们主要讨论单参数($m=1$)分支.

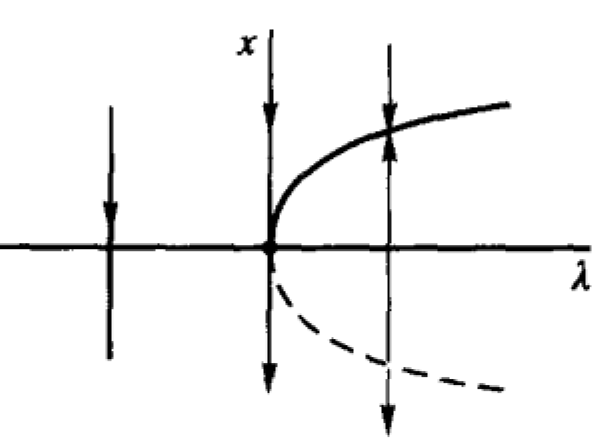
对单参数的一维常微分方程，即 $n=m=1$. 若有 ξ 使 $f(\xi,\lambda)=0$. 则 $x=\xi$ 为系统的平衡解，即相空间（直线）或带参数的平面 $Ox\lambda$ 上的平衡点（奇点）. 显然，当 x 从 $\xi+0$ 变到 $\xi-0$ 时，若 f 即 $\dot{x}$ 从负变为正，则 $x=\xi$ 为系统的稳定平衡解（点）；反之，若 f 即 $\dot{x}$ 从正变为负，则 $x=\xi$ 为不稳定平衡解（点）.

$f(x,\lambda)=0$ 在 $Ox\lambda$ 参数平面上为一曲线，曲线上的点对应系统的平衡点，可把 $f(x,\lambda)$ 表示成 x 和 λ 的多项式形式然后考

虑相平面(直线)上平衡解(点)的分支. 对单参数的一维常微分方程,有如下几种典型的分支类型:

(1) 鞍结点分支 $\dot{x}=\lambda-x^2$

平衡点为 $\xi=\pm\sqrt{\lambda}$. 当 $\lambda\geqslant 0$ 时才有实平衡点; $\lambda=0$ 时平衡点 $\xi=0$ 稳定; $\lambda>0$ 时平衡点 $\xi=\sqrt{\lambda}$稳定而平衡点 $\xi=-\sqrt{\lambda}$不稳定. 在 $Ox\lambda$ 参数平面上平衡点为一条抛物线,如图(6.25). 抛物线上支(连同原点)上的点是稳定的,下支上的点是不稳定的. 原点是分支点: λ 从 $\lambda+0$ 变到 $\lambda-0$ 时系统的平衡点从一个稳定、一个不稳定的两个变为一个(半稳定)再变为不存在. $\lambda=0$ 为分支点,称为**鞍结点分支点**.



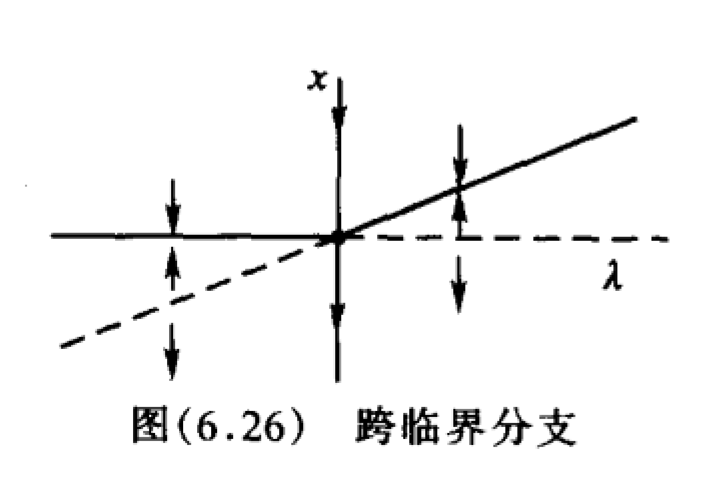
图(6.25) 鞍结点分支

(2) 跨临界分支 $\dot{x}=\lambda x-x^2$

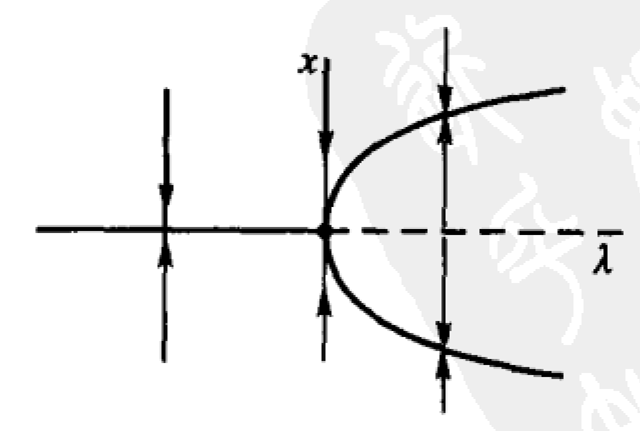
平衡点为 $\xi=0$ 和 $\xi=\lambda$. 当 $\lambda\neq 0$ 时系统有一个稳定和一个不稳定的两个平衡点; 当 $\lambda=0$ 时系统有一个半稳定平衡点(原点). 因此 $\lambda=0$ 为分支点,称为**跨临界分支点**,分支图如图(6.26)所示.

(3) 叉式分支 $\dot{x}=\lambda x-x^3$

平衡点为 $\xi=0$ 和 $\xi=\pm\sqrt{\lambda}$. 当 $\lambda>0$ 时系统有两个稳定和一个不稳定的三个平衡点; 当 $\lambda\leqslant 0$ 时系统有一个稳定平衡点($\lambda=0$ 时为原点). 因此 $\lambda=0$ 为分支点,称为**叉式分支点**,分支图如图(6.27)所示.



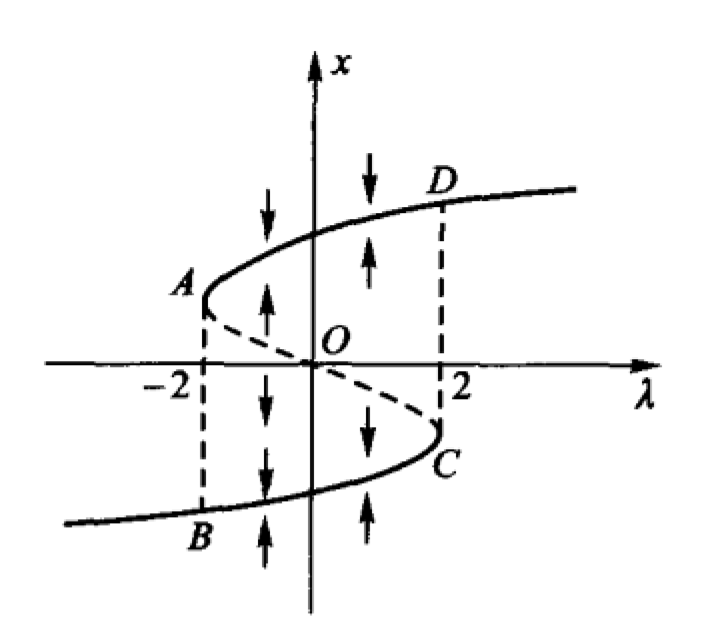
图(6.26) 跨临界分支



图(6.27) 叉式分支

(4) 复合分支　$\dot{x}=\lambda+3x-x^3$

当$|\lambda|>2$时有一个稳定平衡点；$\lambda=\pm2$时有一个稳定和一个不稳定的两个平衡点；而$|\lambda|<2$时有两个稳定和一个不稳定的三个平衡点.如图(6.28)所示.因此$\lambda=\pm2$是分支点,称为**复合分支点**.值得注意的是当参数λ逐渐增加由$-\infty$到-2再到2时,由于稳定性,系统平衡点逐渐沿左半支向上移动而不突然变化,但当移到$\lambda=2$时平衡点会从C跳到D,由下半支跳到上半支,然后随着参数增加平衡点在新的位置上沿上半支继续向右移动.反之,当参数λ逐渐减少由$+\infty$降到2再减到-2时,系统平衡点先在上半支逐渐向下移动,但在$\lambda=-2$处平衡点会从A跳到B,然后沿着下半支继续向左移动.这种在分支点处的突变是复合分支的特点,它能很好地解释实际系统的一些现象.



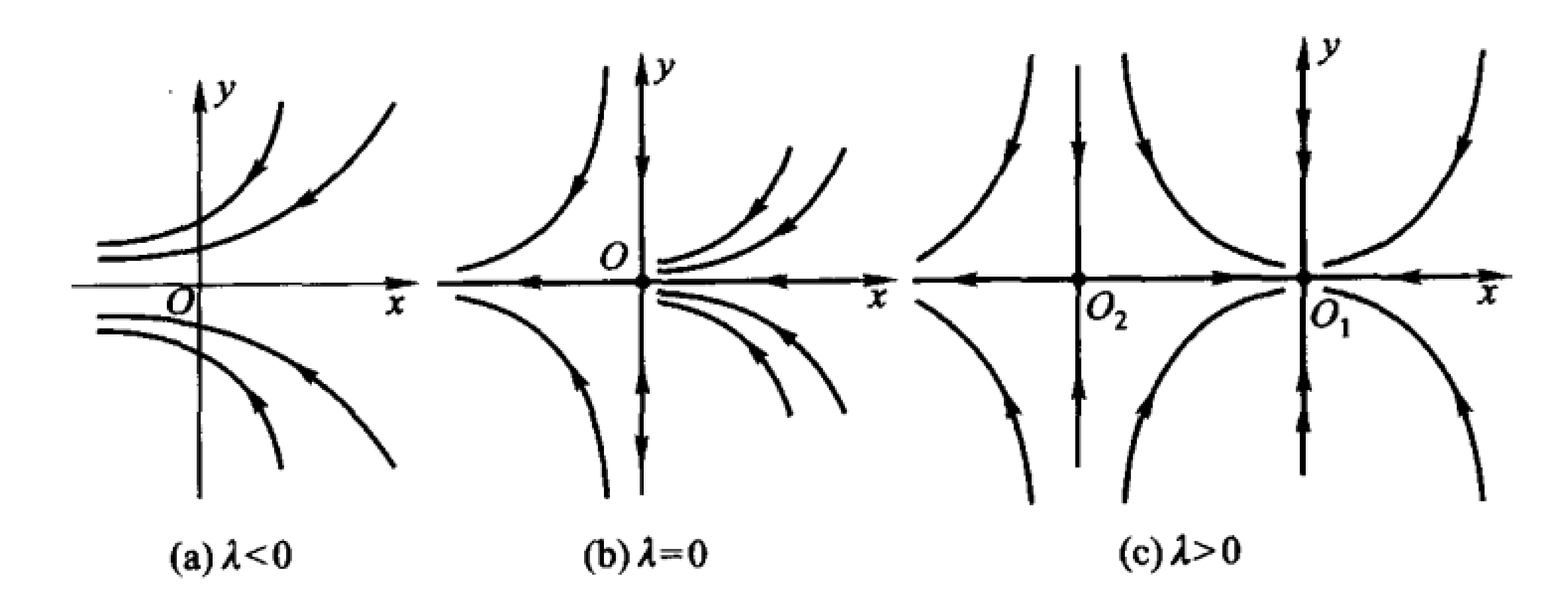
图(6.28)　复合分支

对平面常微分方程,即方程(6.55)中$n=2$时,情况复杂得多.除平衡点分支又称局部分支外,还有大范围分支,包括极限环、同宿环、异宿环的分支,都是研究参数变化时轨线图貌的突变.由定理12,只要方程不满足结构稳定性的三条充要条件的其中一条,则方程是分支方程,存在分支.这里仅对单参数情形举几个典型例子略为介绍.

例1　平面鞍结点分支.

$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda-x^2,\\ \dot{y}=-y.\end{cases}$$

实际上是将一维鞍结点分支移到二维相平面上.当$\lambda<0$时无平衡点；$\lambda=0$时,原点是退化奇点(高阶奇点)；$\lambda>0$时,有两个鞍点$(\pm\sqrt{\lambda},0)$.$\lambda=0$为分支点,如图(6.29a).



图(6.29a)　平面鞍结点分支

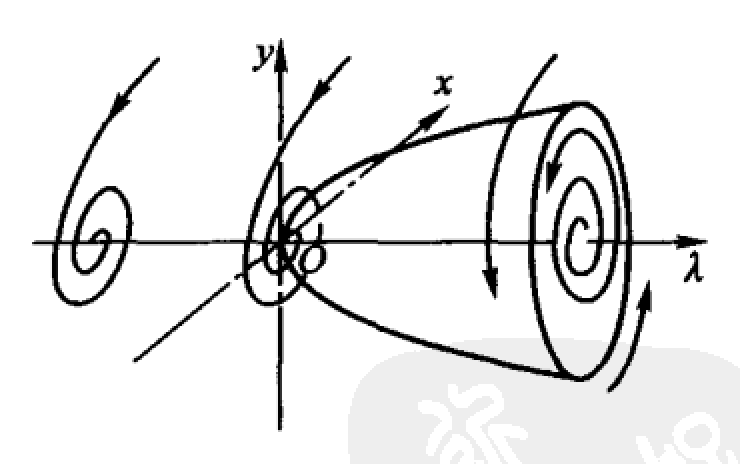
例 2　Hopf 分支

$$\begin{cases}\dot{x} = \lambda x - y - x(x^2 + y^2),\\ \dot{y} = x + \lambda y - y(x^2 + y^2).\end{cases}$$

通过变换 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$,原方程化为极坐标方程

$$\begin{cases}\dot{r} = r(\lambda - r^2),\\ \dot{\varphi} = 1.\end{cases}$$

r 为一维叉式分支,但要求 $r \geqslant 0$.对应的 Oxy 相平面上,$\lambda \leqslant 0$ 时原点为稳定焦点;$\lambda > 0$ 时,原点变为不稳定焦点,同时存在稳定极限环 $r = \sqrt{\lambda}$,即 $x^2 + y^2 = \lambda$, $\lambda = 0$ 为分支点,如图(6.29b).这种由于参数的变化而跳出极限环的分支做称为 Hopf 分支.



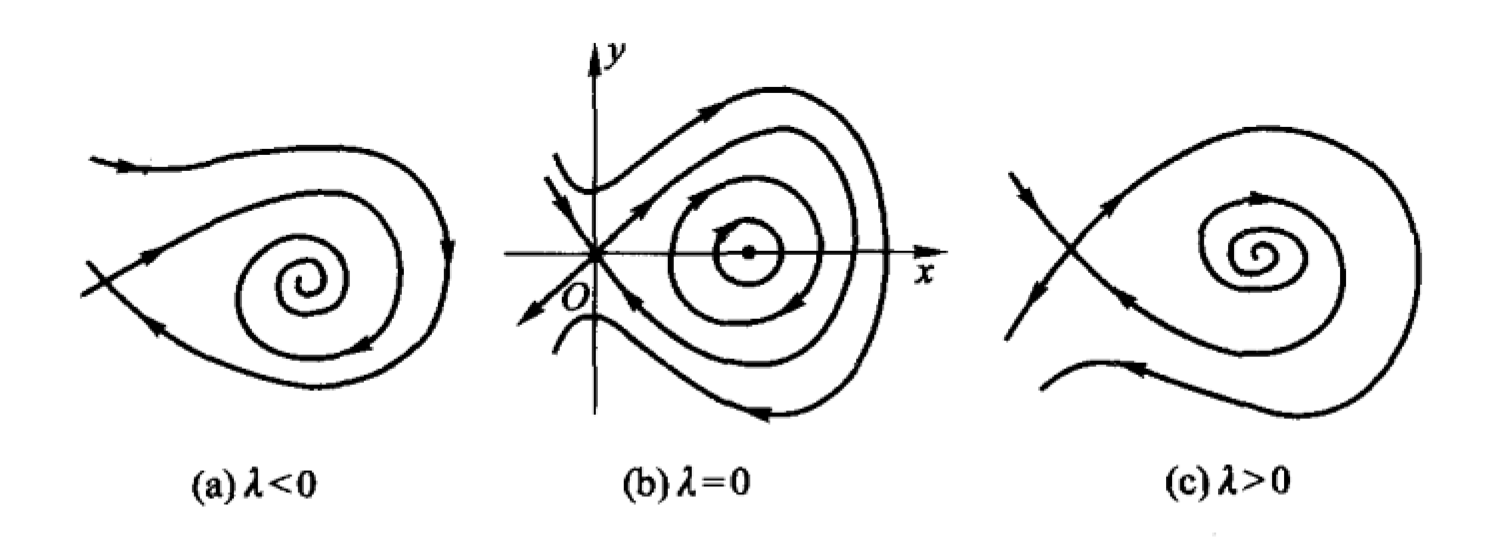
图(6.29b)　Hopf 分支($\lambda <, =, > 0$)


例 3　同宿分支.

$$\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = x - x^2 + \lambda y.\end{cases}$$

方程有二平衡点:原点(0,0)和(1,0).当 $\lambda = 0$ 时,(0,0)为鞍

点,(1,0)为中心,出现同宿轨(环);当 $\lambda\neq0$ 时,(0,0)仍为鞍点,而(1,0)变为焦点,且当 $\lambda<0$ 时为稳定焦点,当 $\lambda>0$ 时为不稳定焦点. $\lambda=0$ 为分支点,称为**同宿分支点**,如图(6.29c).



图(6.29c) 同宿分支

如果方程改为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x-x^2+\lambda y+xy,\end{cases}$$

和前面一样,只是 $\lambda>0$ 时会由不稳定焦点产生闭轨(极限环). $\lambda=0$也是同宿分支点.

例 4 异宿分支

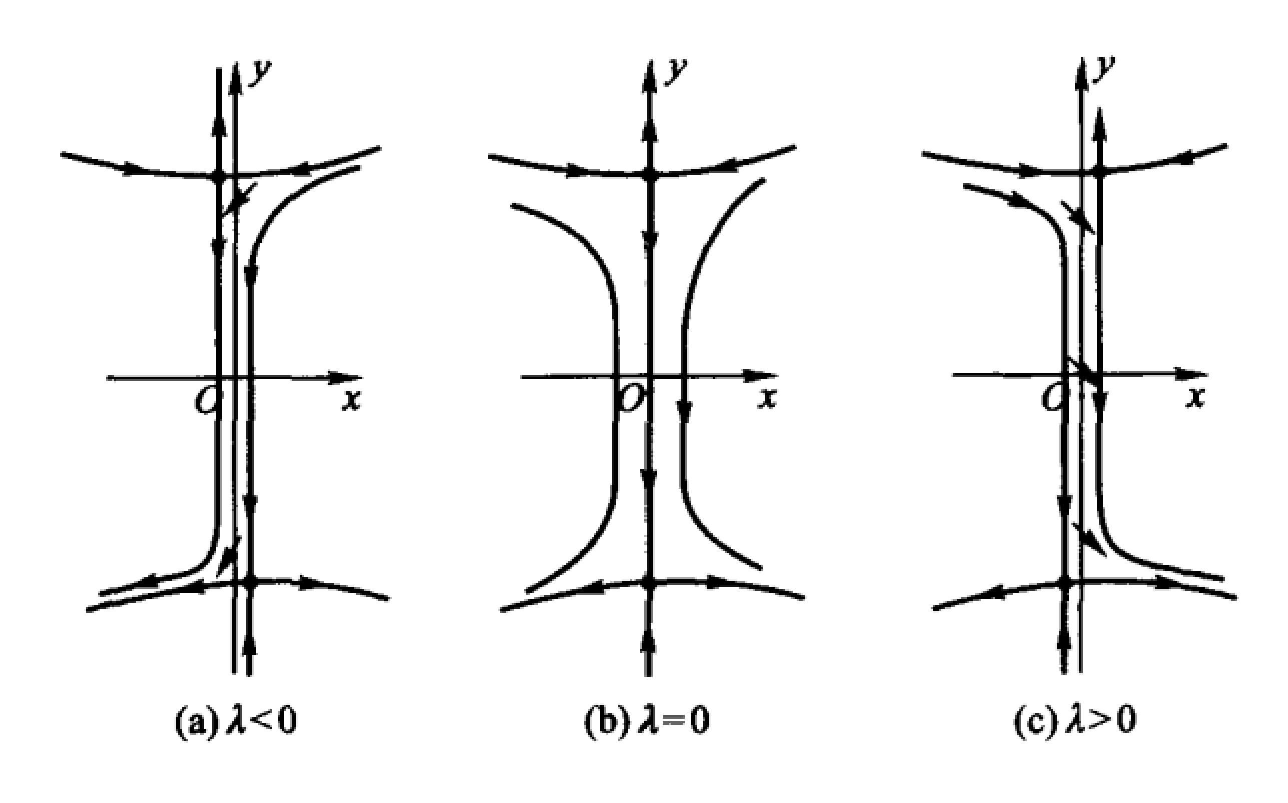
$$\begin{cases}\dot{x}=\lambda+x^2-xy,\\ \dot{y}=y^2-x^2-1.\end{cases}$$

$\lambda=0$ 时,方程有两平衡点$(0,\pm1)$,均为鞍点,存在连结鞍点的分界线(异宿轨);当 $\lambda\neq0$ 时,在相平面上$(0,\pm1)$附近仍有两平衡点鞍点,但异宿轨破裂,对 $\lambda>0$ 及 $\lambda<0$ 形成两种不同的轨线图貌. 分支点 $\lambda=0$ 称为**异宿分支点**,如图(6.29d)所示.

对带参数的方程组(6.55),当 $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ 时相应的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mathbf{0})\equiv\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) \tag{6.56}$$

是结构不稳定的,则称(6.55)是一个分支方程,把 $|\boldsymbol{\lambda}|\ll1$ 的系统(6.55)称为(6.56)的一个 $\boldsymbol{C}^r$ **开折**(unfolding). 如果所选的参数包



图(6.29d) 异宿分支

括了方程(6.55)可能出现的各种拓扑结构，则称这个开折为**普适开折**.普适开折中对应参数最少的个数称为**余维数**.对分支问题的研究可简化为对余维数的分支方程的研究，并通过特殊变换化为一种称为规范形的标准形式进行讨论[21~24].

例 5 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^3 \tag{6.57}$$

是前面(3)叉式分支 $\dot{x} = \lambda x - x^3$ 的一个开折，但最广泛的开折应是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(\lambda) + b(\lambda)x + c(\lambda)x^2 - x^3. \tag{6.58}$$

而上式右端可变为

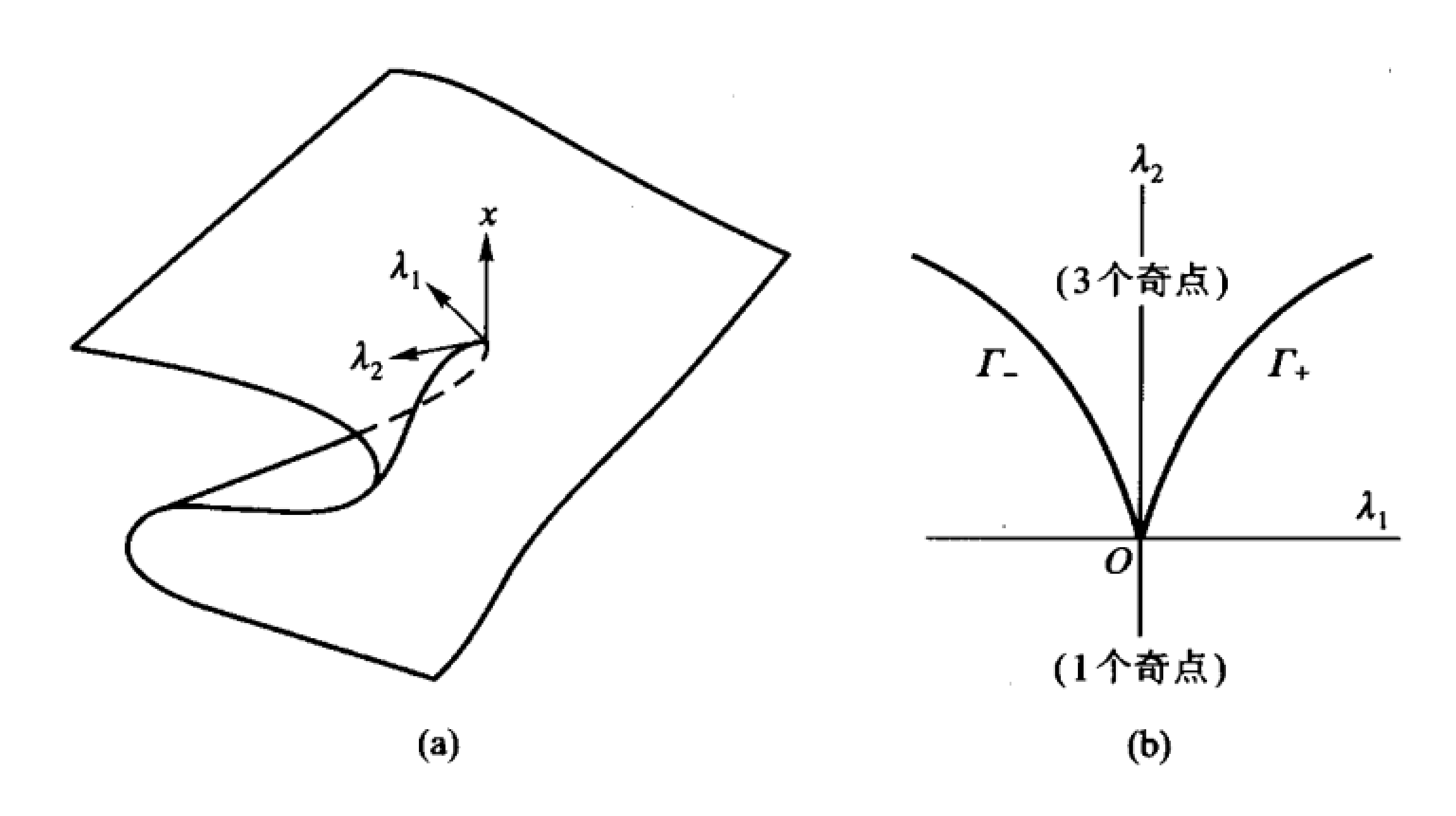
$$\lambda_1(\lambda) + \lambda_2(\lambda)\left(x - \frac{c(\lambda)}{3}\right) - \left(x - \frac{c(\lambda)}{3}\right)^3,$$

其中 $\lambda_1(\lambda) = a(\lambda) + \frac{b(\lambda)c(\lambda)}{3} + \frac{2c^3(\lambda)}{27}$，$\lambda_2(\lambda) = b(\lambda) + \frac{c^2(\lambda)}{3}$.令 $y = x - \frac{c(\lambda)}{3}$，则方程(6.58)最后变为($y$ 改写为 x)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 + \lambda_2 x - x^3, \tag{6.59}$$

可把 λ_1, λ_2 视为独立参数.这样，方程(6.59)是方程(6.57)的一个普适开折.

它的平衡点由参数方程 $\lambda_1+\lambda_2 x-x^3=0$ 决定，其曲面图如图(6.30a). $\lambda_1=0$ 时有平衡点 $x=0$，其他平衡点由参数方程的判别式为 $\frac{\lambda_1^2}{4}+\frac{\lambda_2^3}{27}=0$ 确定，此式即为分支曲线. 如图(6.30b)所示. 由分支曲线区分为不同平衡点个数的不同区域.



图(6.30)　平面两参数分支

进一步可以证明(6.57)的任一单参数开折均不具有(6.59)的某些性质，于是称由(6.57)引出的分支是余维 2 的. 可以证明[22]，

定理 13　当 $a\neq 0$ 时，一维微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax^{k+1}+O(|x|^{k+2})$$

是余维 k 的，它的一个普适开折可取为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda_1+\lambda_2 x+\cdots+\lambda_k x^{k-1}+ax^{k+1}.$$

因此，前面(1)鞍结点分支 $\dot{x}=\lambda-x^2$ 是 $\dot{x}=-x^2$ 的一个普适开折，但 $\dot{x}=\lambda x-x^2$ 则不是.

6.5.2　Lorenz 方程与混沌

前面讨论的多是一、二维驻定微分方程组，相平面上的轨线图

貌不会太复杂,仅有奇点、极限环、同宿轨、异宿轨等几种特殊轨线.对三维及以上的驻定微分方程组,或二维及以上的非驻定微分方程组,其轨线或积分曲线可能出现非常复杂的性态.Lorenz 方程便是其中的一个典型模型.它原是气象学家洛伦茨研究大气变化时提出的底部加热二维对流的简化模型,通过计算机模拟发现了方程具有极丰富的分支和混沌性态.经过李天岩、Yorke 等人的继续研究,开创了混沌科学的新纪元.

Lorenz 方程是

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cx - xz - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{1.26}$$

其中参数 a, b, c 均为正数.Lorenz 方程有如下性质:

(1) 对称性.当用 $(-x, -y, z)$ 替换 (x, y, z) 时方程形式不变,方程关于 z 轴对称.

(2) z 轴是不变集.因 $x=0, y=0$ 满足方程,此时 $\dot{z} = -bz$,即 z 轴为不变集,且轨线沿着 z 轴趋于原点;而在平面 $x=0$ 上,当 $y>0$ 时,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$;当 $y<0$ 时,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0$,因此环绕 z 轴的轨线从平面 $x=0$ 的上方看是逆时针方向旋转的.

(3) 耗散性和吸引性.常微分方程描述系统的运动,有一大类系统,在运动时,其相空间容积 U 是收缩的,这类系统我们称为**耗散系统**;当容积 U 不变时系统称为**保守系统**;当容积 U 扩大时系统称为**扩张系统**.可以通过系统相空间容积变化率

$$\alpha \equiv \frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{f} \tag{6.60}$$

小于、等于或大于零来判断系统是耗散、保守或扩张.

对 Lorenz 方程(1.26),可以计算得

$$\alpha = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(a + b + 1) < 0,$$

因此 Lorenz 方程是耗散系统. 容积 U 随时间推移收缩为 $Ue^{-(a+b+1)t}$,说明 Lorenz 方程的解是有界的,轨线最终被吸引到一个体积为零的较低维的集合内.

下面就参数 c 的不同变化范围讨论 Lorenz 方程(1.26)轨线的性态.

当 $0<c<1$ 时,原点 $S_0=(0,0,0)$是 Lorenz 方程的唯一平衡点.取李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}(x^2+ay^2+az^2),$$

容易验证

$$\dot{V}=-\frac{a(1+c)}{2}(x-y)^2-\frac{a(1-c)}{2}(x^2+y^2)-abz^2,$$

因 V 定正、$\dot{V}$定负,原点 S_0是渐近稳定的. Lorenz 方程的所有轨线均趋于原点.

在原点 S_0线性化 Lorenz 方程可得系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-a & a & 0\\ c & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{bmatrix},$$

其特征根为

$$\lambda_1=-b,\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}[-(1+a)\pm\sqrt{(1+a)^2-4a(1-c)}].$$

当 $c=1$ 时,原点 S_0仍是 Lorenz 方程的唯一平衡点.但 $\lambda_1<0,\lambda_2=-(1+a)<0,\lambda_3=0$,出现叉式分支,原点 S_0不稳定.

而当 $c>1$ 时,$\lambda_1<0,\lambda_2<0,\lambda_3>0$,原点 S_0不稳定.且此时除原点外还出现两个异于原点的平衡点

$S_+=(\sqrt{b(c-1)},\sqrt{b(c-1)},c-1),S_-=(-\sqrt{b(c-1)},-\sqrt{b(c-1)},c-1)$,

S_+,S_- 对称于 z 轴. 对此两平衡点,考虑在平衡点处线性化 Lorenz 方程,可求得其特征方程为

$$\lambda^3+(a+b+1)\lambda^2+b(a+c)\lambda+2ab(c-1)=0.$$

因 $c>1$,特征方程系数均大于零,实特征根必为负根. 且由 §6.1 例 3 知平衡点 S_+, S_- 渐近稳定的条件是

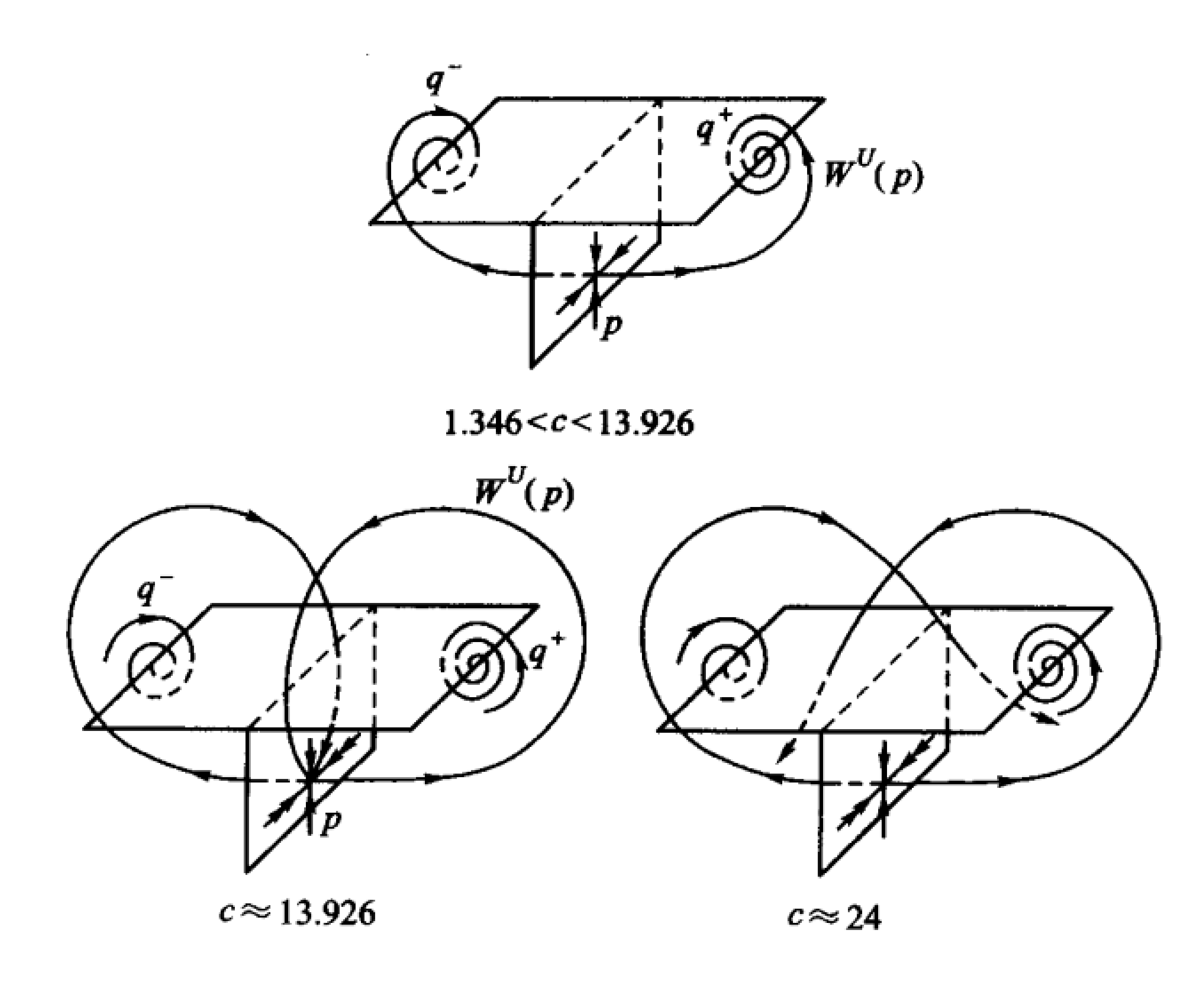
$$a<b+1, c>1 \quad 或 \quad a>b+1, 1<c<c_0, 其中\ c_0=\frac{a(a+b+3)}{a-b-1}.$$

当 $c=c_0>1$ 时,$\Delta_2=0$,特征方程有一对共轭纯虚根,出现 Hopf 分支;当 $c>c_0>1$ 时,特征方程除一负实根外有一对共轭复特征根,其实部为正,对空间线性微分方程,这种空间平衡点称为**鞍焦点**,空间轨线投映于平面上为焦点和鞍点状.

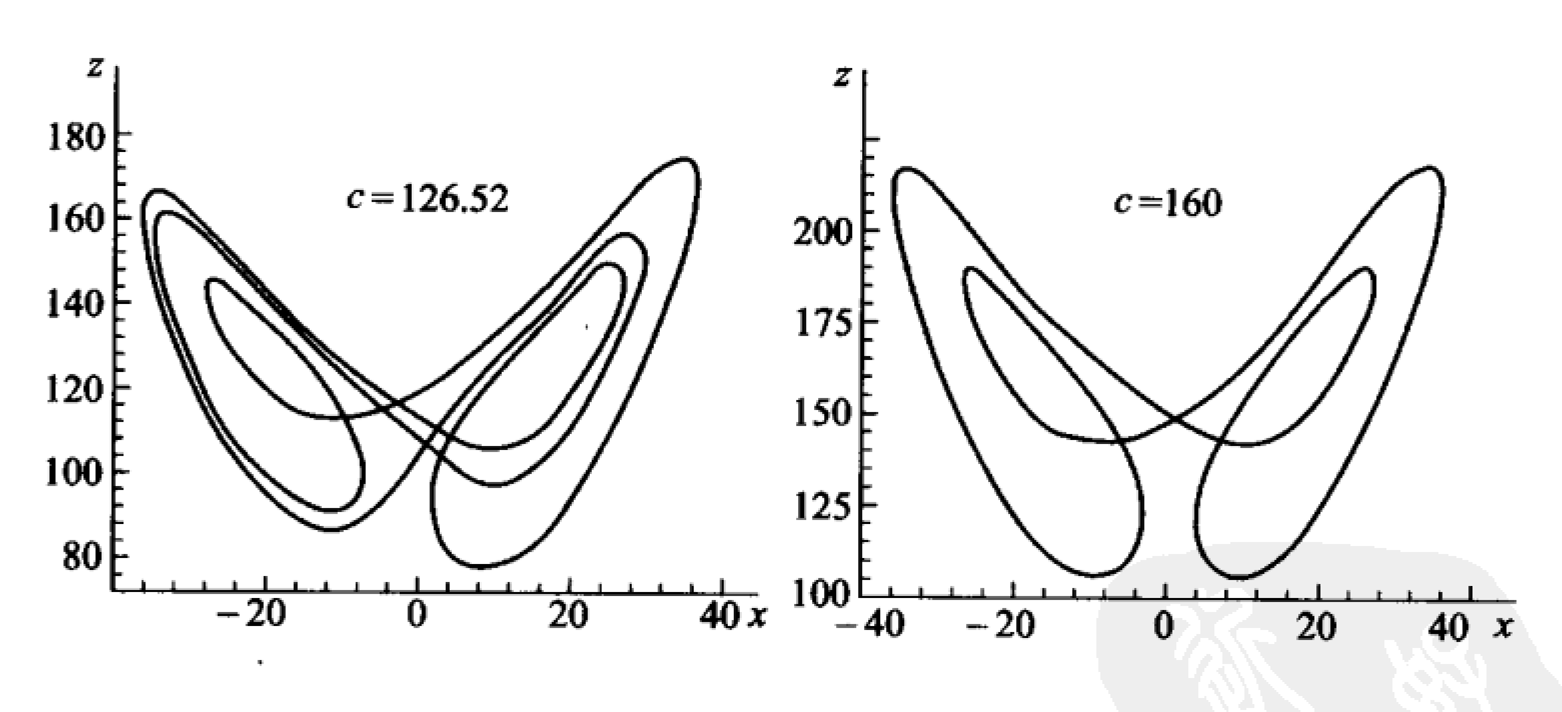
下面我们固定参数 $a=10$, $b=\frac{8}{3}$进行讨论,此时 $c_0=24.7368$. 从前面的分析可知:当 $0<c<1$ 时,Lorenz 方程的所有轨线均趋于原点;当 $c>1$ 时,存在原点 S_0和平面 $z=c-1$ 上 S_+, S_- 三个平衡点. 当 $1<c<c_0$时,平衡点 S_+、S_- 是稳定的;当 $c>c_0$时,平衡点 S_+, S_- 不稳定,属鞍焦点.

取参数 c 的不同值,我们可以通过数值解画出 Lorenz 方程在相空间的轨线图貌. 由图(6.31)可知,当 $1.346<c<13.926$ 时,由原点出发的两条轨线各自分别趋于两平衡点 S_+, S_-;在 $c=13.926$ 处,出现同宿轨;当 $13.926<c<c_0$时,出现由原点出发的两条轨线各自分别绕过一平衡点趋于另一平衡点,并在相空间中可能存在闭轨线或其他复杂轨线;当 $c>c_0$时,由于两平衡点 S_+, S_- 属鞍焦点,相空间中的轨线更为复杂. 对大的参数 c 值,Lorenz 方程的解往往是周期的,如相空间中轨线在 Oxz 平面投影所得的图(6.32)所示.

我们现在讨论当参数 $a=10$, $b=\frac{8}{3}$, $c>13.926$ 时 Lorenz 方程在相空间中存在的复杂轨线. 图(6.33)所表示的是相空间中轨线走向示意图,由图中可看出从原点 O 附近右区域内出发的轨线从右边转入左边绕平衡点 S_- 向外旋转最后回到原点 O 附近左区



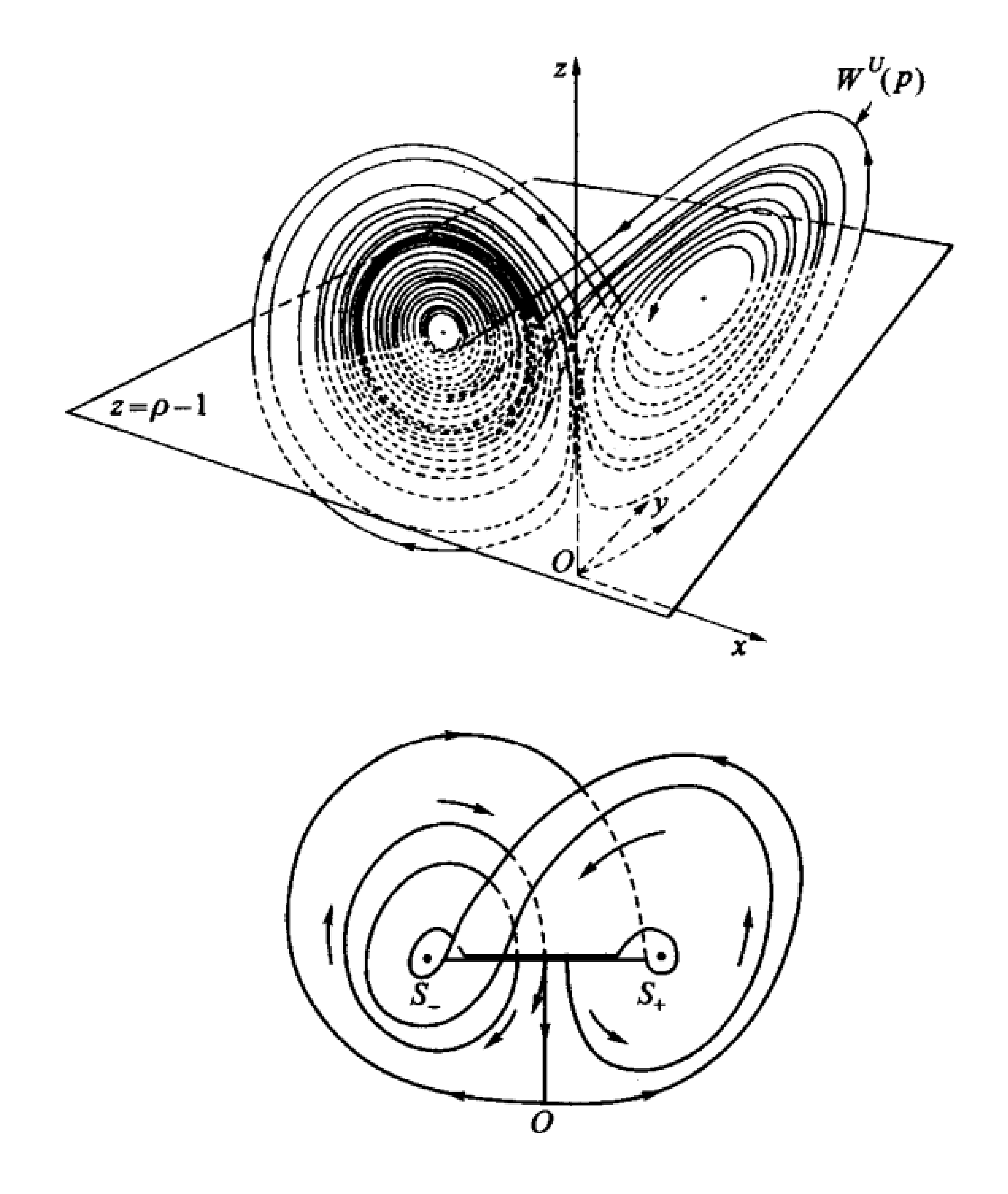
图(6.31)　Lorenz 方程($a=10, b=8/3$)轨线示意图



图(6.32)　Lorenz 方程的一些周期轨线

域内,然后继续由 O 左区域从左边转入右边绕平衡点 S_+ 向外旋转最后回到 O 附近右区域内.这样反复的无限循环始终既不趋向平衡点 S_+,也不趋向平衡点 S_-,永远在平衡点 S_+ 和 S_- 之间摆

动.而且绕各平衡点旋转次数及平衡点之间摆动次数根据参数轨线初始位置不同而不同,根本无法预测,对初值非常敏感.



图(6.33) 轨线走向示意图

Lorenz 方程出现的这种轨线的极限集是在一有限区内的吸引集,但它与通常了解的吸引集不同,既不是平衡点也不是极限环或周期变化的点集.我们称这种吸引集为**奇异吸引子**(奇怪吸引子),奇异吸引子还有对初值敏感的特性.存在奇异吸引子这种复杂现象又称为**混沌**(浑沌)[22~24].混沌也可简单解释为对初值的敏感性,初值的细微差异引起后续的巨大不同,无法预测.但是 Lorenz

方程是确定的系统，确定系统中出现的预测的不确定性、随机性这种现象的发现，给牛顿力学出现以来的科学观念造成巨大的冲击，人们开始用新的观点解释自然现象，如台风的难于预测是本质的．研究自然和社会科学中的混沌已形成一门新的科学．

当参数 $a=10, b=\frac{8}{3}, c>13.926$ 时可以通过计算发现对不同的 c，Lorenz 方程呈现各种复杂的轨线性态，对应于奇异吸引子和混沌现象．对不同的 a,b,c 在一定范围内也同样出现奇异吸引子和混沌现象．如表(6.1)[26]．关于 Lorenz 方程在相空间的轨线图貌的绘制可参考附录Ⅱ．

表(6.1) Lorenz 系统中的分支与混沌($a=10, b=8/3$)

参数 c 的范围	解的性质
<1	趋向无对流的定态
1～13.926	趋向三个平衡点之一，在 13.926 处出现同宿轨道
13.926～24.06	存在无穷多个周期和混沌轨道
24.06～24.74	奇怪吸引子与一对稳定平衡点共存
24.74～148.4	混沌区，其中有
99.526～100.79	为一个内嵌的倍周期序列
145.9～148.4	为倍周期分支序列
148.8～166.07	周期区
166.07～233.5	混沌区，其中有
166.07～169	从周期到混沌的阵发过渡
233.5 附近	与 148.4 附近类似的分支序列
233.5～+∞	周期区，有 $c=+\infty$ 往下的倍周期序列

除 Lorenz 方程外，后来还发现一大类具有混沌特性的系统族[27]．就微分方程而言，只有三维及以上相空间中的轨线才有可能出现混沌或奇异吸引子，但对映射而言，一维映射即可出现混沌．

为进一步了解混沌的意义，我们考虑离散动力系统

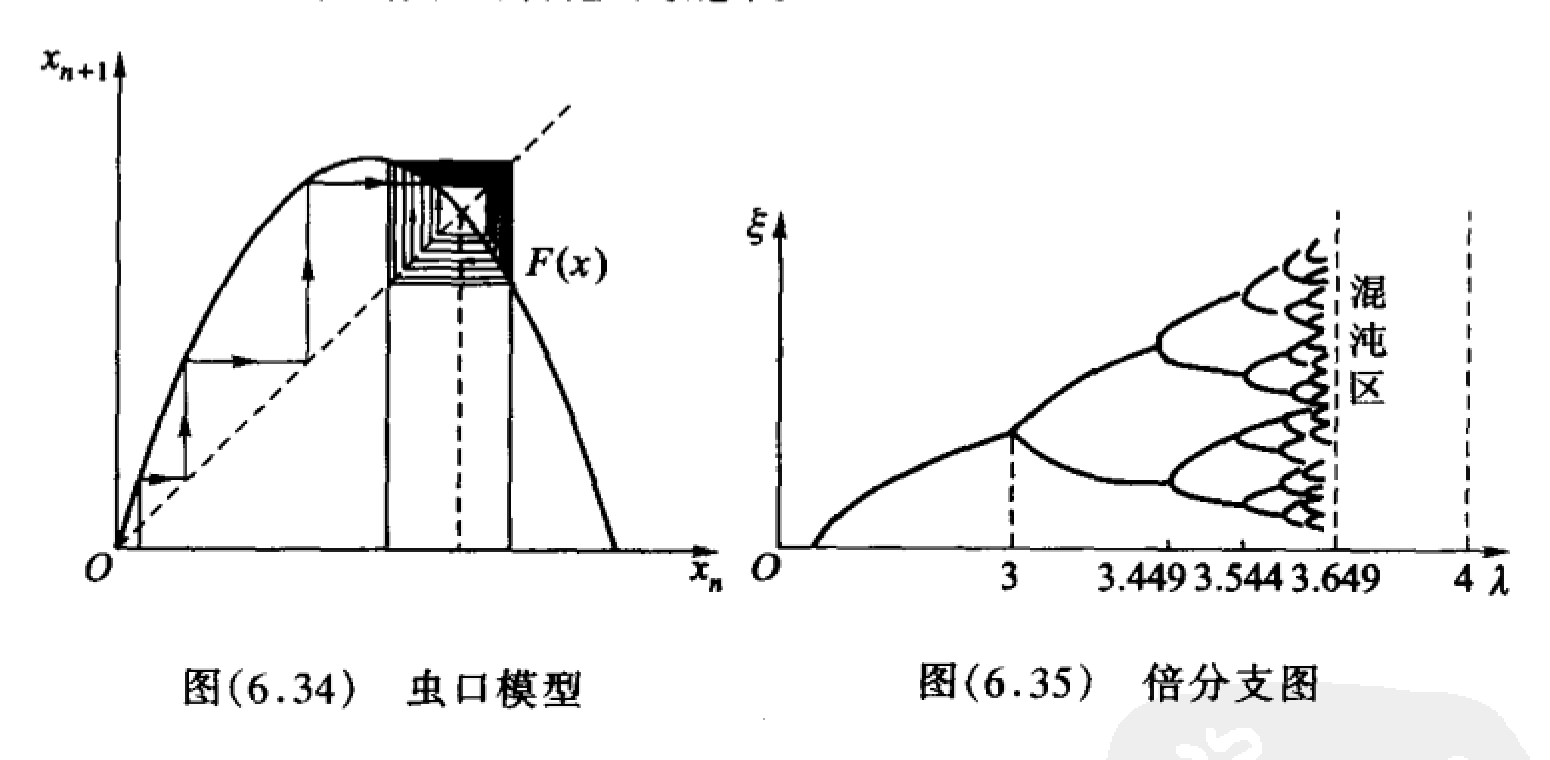
$$x_{n+1}=f(x_n), n=0,1,2,\cdots$$

这是一个差分方程．微分方程通过差分化可化为差分方程．种群(昆虫)模型

中按代计算其种群数(虫口数)时便可用差分方程表示,此时其模型又称为**虫口模型**.最简单的虫口模型是 logistic 差分方程

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \tag{6.61}$$

这是一个单参数离散动力系统,如图(6.34).如有 $x_1 = x_0$,称 x_0 为不动点,当 $x_n = x_0$,而 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 互不相等时称 x_0 为**周期 n 点**.易证明当 $0<\lambda<3$ 时,不管初值 $x_0 \in (0,1)$ 如何,方程的解即 $n \to \infty$ 时的点 x_n 均收敛于不动点 $\bar{x} = 1 - \frac{1}{\lambda}$;而当 $3<\lambda<1+\sqrt{6}$ 时,初值 $x_0 \in (0,1)$ 的方程(6.61)的解收敛于两个周期 2 点 $\bar{x}_1, \bar{x}_2\,(\bar{x}_2 \neq \bar{x}_1)$.因此 $\lambda = 3$ 为方程(6.61)的分支点.随着 λ 的逐渐增大,方程(6.61)从两个周期 2 点变为四个周期 4 点,再八个周期 8 点,等等.这种逐步加倍的分支称为**倍分支**.用计算机可绘出方程(6.61)的参数与周期点关系的倍分支图,如图(6.35).当 $\lambda > 3.569\,945\,673\cdots$ 时,方程(6.61)出现混沌解.$x_n\,(n = 0,1,\cdots)$ 可能不收敛于任何点,到处游荡,是一个奇异吸引子,且存在对初值的敏感性.



图(6.34) 虫口模型　　　　图(6.35) 倍分支图

对线段上的连续映射,李天岩和 Yorke 曾给出著名的"周期 3 蕴涵混沌"的

定理 14(Li-Yorke 混沌定理) 设 I 是一个区间,$f: I \to I$ 连续.如 I 中有一点 a,使 $b = f(a)$,$c = f(b)$,$d = f(c)$,满足

$$d \leqslant a < b < c \text{ 或 } d \geqslant a > b > c,$$

则对每一个 $k = 1,2,\cdots$,在 I 中有 f 的一个周期 k 的周期点.且 I 中有一个不

含周期点的不可列集 S,满足

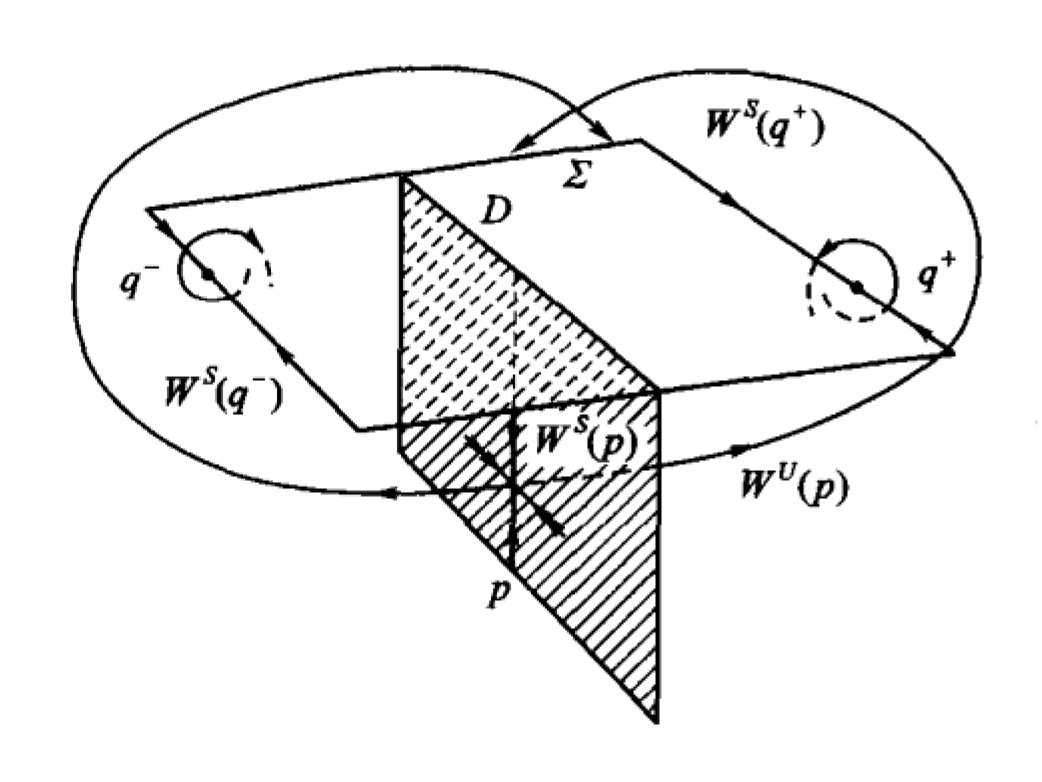
(1) 对 S 中的每两个 p,q,有

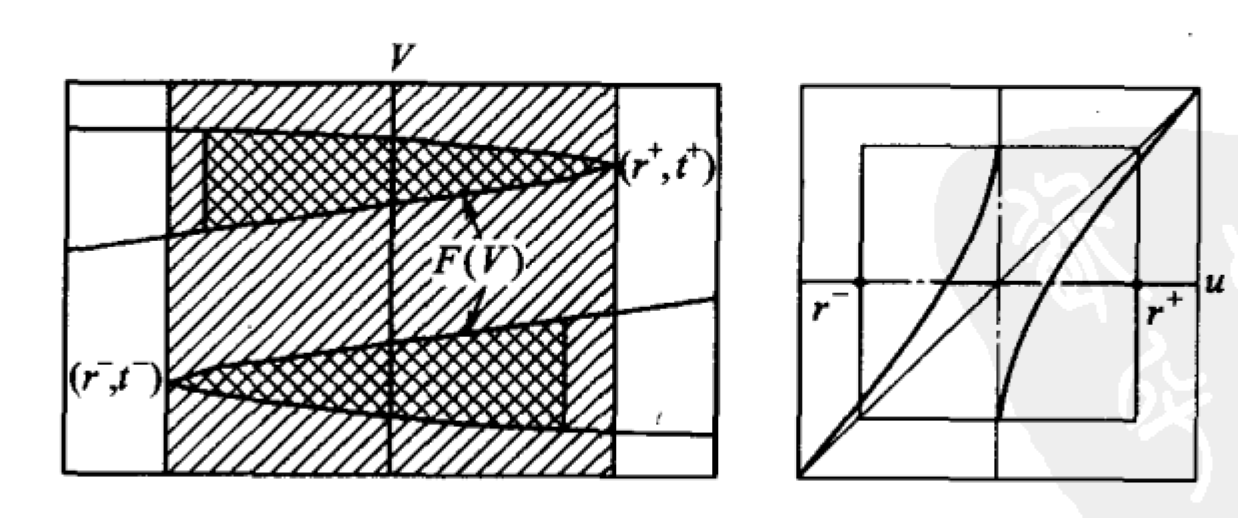
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f^n(p)-f^n(q)|>0,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}|f^n(p)-f^n(q)|=0;$$

(2) 对 S 中的每一个 p 及 I 中的周期点 q,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f^n(p)-f^n(q)|>0.$$

Li-Yorke 定理给出了混沌的严格数学定义,后来人们就把满足 Li-Yorke 定理结论的集合称为 Li-Yorke 混沌集.后来发现,可以将相空间中 Lorenz 方程的轨线通过 Poincaré 映射映射为 $z=c-1$ 平面上的 $F(u,v)$,而进一步可分解为 $F(u,v)=(f(u),g(u,v))$,而 $f(u)$ 满足线段映射存在混沌的 Li-Yorke 定理条件,如图(6.36)所示,从而说明 Lorenz 方程存在混沌[28,32]





图(6.36) Lorenz 方程的 Poincaré 映射

李天岩和 Yorke 首先给出了混沌的数学定义，但仅对线段映射而言.后来人们将其推广出现各种混沌的定义，而且发现了多种满足混沌性态的系统，如 Henon 映射、强迫 Duffing 微分方程等.同时还发现在物理、化学、股票市场等自然科学、社会科学中存在各种混沌现象.

由 Lorenz 方程引发的混沌的概念出现后，人们发现已在早期得到的 KAM 定理、Smale 马蹄、Mel'nikov 定理中研究的系统亦存在混沌，这是与 Li-Yorke 混沌不同类型的混沌.

习题 6.5

1. 试判别下列一维单参数微分方程的 λ 的分支值:

(1) $\dot{x}=\lambda+2x+x^2$;

(2) $\dot{x}=1+2\lambda x+x^2$;

(3) $\dot{x}=x-3\lambda x^2+x^4$.

2. 试通过计算平衡点和线性奇点性态求下列平面单参数微分方程的 λ 的分支值，并画图验证(令 $\dot{x}=y$):

(1) $\ddot{x}+(x^2-\lambda)\dot{x}+x=0$;

(2) $\ddot{x}+(x-1)\dot{x}+\lambda x=0$;

(3) $\ddot{x}+\dot{x}+x^2-\lambda=0$.

3. 试证明 n 维空间中容积 U 沿驻定微分方程的解的变化率公式(6.60).

4. 试用计算机绘出 Lorenz 方程(1.26)在参数 $a=10, b=\frac{8}{3}$ 和初值(1,1,0)下不同参数 $c=\frac{1}{3}$,13,20,120 的轨线图貌.

* §6.6 哈密顿方程

6.6.1 完全可积性

在第一章提到大量物理、力学与天文问题的数学模型可由哈密顿方程描述.这一节我们讨论哈密顿方程的一些性质,哈密顿方程的研究大大地促进了非线性系统理论的发展.

哈密顿力学系统可用**哈密顿**(正则)**方程**表示为

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{6.62}$$

其中$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = (p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_n)$为系统的 n 对共轭变量,称为正则变量. $\boldsymbol{p}$ 称为系统的**广义坐标**,$\boldsymbol{q}$ 称为**广义动量**,H 称为**哈密顿函数**或能量函数.因由 H 可唯一确定哈密顿方程,有时称哈密顿方程 H,意即由 H 确定的哈密顿方程(6.62).

如记 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$,$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}$则(6.62)式可简写为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}\,\nabla_x H,$$

这里∇_x为梯度向量.

设 $H = H(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$不显含 t,此时方程构成相空间$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$中的向量场$\left(-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)$.显然有$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} = 0$,即

$$H(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t)) = c, \tag{6.63}$$

其中$(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t))$为哈密顿方程(6.62)的解,$c$ 为某常数.因此由§7.2 关于首次积分的定义知

性质 1 哈密顿函数 H 是哈密顿方程(6.62)的首次积分.

现考虑容积 U,由容积变化率公式(6.60),沿哈密顿方程(6.62)有

$$\alpha \equiv \frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathrm{div}(\boldsymbol{J}\,\nabla_x H) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial_2 H}{\partial q_i \partial p_i}\right) = 0.$$

即

性质 2(刘维尔保积定理) 哈密顿方程是保守系统.相空间中任何区域 U 沿着哈密顿方程轨线变化其体积保持不变,二维相平面上哈密顿方程轨线为闭曲线族.

由性质 2 知哈密顿系统内不可能存在渐近稳定平衡点和渐近稳定极限环.且由性质 2 可推出

性质 3(庞加莱回归定理) 空间中任一点 $\boldsymbol{x}_0$ 的任一邻域 U,必存在 $\boldsymbol{x}\in U$,使得由 $\boldsymbol{x}$ 出发的哈密顿方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 必回到 U,即存在 $t^*>0$,使得 $\boldsymbol{x}(t^*)\in U$.

证明 记 $U(t)$ 为 $t=0$ 时邻域 U 经时间 t 后哈密顿方程的解所在的区域,由性质 2,$U(t)$ 保持体积不变.因此,对 $U(t)(t=1,2,\cdots)$ 必相交,即有某 $l>k>0$,使得 $U(k)\cap U(l)\neq\varnothing$,于是,$U(0)\cap U(l-k)\neq\varnothing$.记 $\boldsymbol{y}\in U(0)\cap U(l-k)$,$t^*=l-k$,则有 $\boldsymbol{x}\in U(0)=U$,使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}(t^*)\in U$.

性质 4(极值稳定定理) 如 $\boldsymbol{x}$ 为 H 的局部极小或极大值点,则 $\boldsymbol{x}$ 是李雅普诺夫稳定的.

证明 不失一般性,设 $H(\boldsymbol{0})=0$,0 是 H 的极小值,于是存在 $\eta>0$,使得当 $0<\|\boldsymbol{x}\|<\eta$ 时,有 $H(\boldsymbol{x})>0$.对任 $\varepsilon>0$,取 $\kappa=\min\{\varepsilon,\eta\}$,$M=\min\{H(\boldsymbol{x})\mid\|\boldsymbol{x}\|=\kappa\}$,因 $H(\boldsymbol{0})=0$,且 H 连续,则存在 δ,$0<\delta<\varepsilon$,使得 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 时,$H(\boldsymbol{x})<M$.于是对 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$,当 $t>0$ 时,过 $\boldsymbol{x}_0$ 的哈密顿方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 有 $H(\boldsymbol{x}(t))=H(\boldsymbol{x}_0)<M$,从而 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\kappa<\varepsilon$.

设 H,F,G 为 p,q,t 的连续可微实值函数,F,G 的**泊松(Poisson)括号**定义为

$$\{F,G\}=\nabla F^{\mathrm{T}}\nabla G=\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}},\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\right)-\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{q}},\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right).$$

容易验证泊松括号满足

(1) 反对称 $\{F,G\}=-\{G,F\}$;

(2) 双线性 $\{aF+bG,K\}=a\{F,K\}+b\{G,K\}$;

(3) 雅可比(Jacobi)行列式

$$\{H,\{F,G\}\}+\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}=0.$$

对哈密顿方程(6.62)的解$(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t))$,记 $F(t)=F(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t),t)$则有

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H\}.$$

于是

性质 5 H,F,G 不显含 t 时有

(1) 当且仅当$\{F,H\}=0$ 时,F 是哈密顿方程 H 的首次积分;

(2) 如 F,G 是哈密顿方程 H 的首次积分,则$\{F,G\}$也是哈密顿方程 H 的首次积分;

(3) $\{F,H\}$是 F 沿哈密顿方程 H 的解的关于 t 的变化率.

对两个哈密顿方程(6.62)的首次积分 F,G,当恒有$\{F,G\}=0$ 时,称 F,G 为**对合的**.

称哈密顿方程(6.62)是**完全可积**的,如果存在可逆(正则)变换

$$\begin{cases}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}),\\ \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\end{cases}$$

将哈密顿方程(6.62)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{J}),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{0},\end{cases}$$

即将哈密顿函数 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$变为 $\overline{H}(\boldsymbol{J})$,称 $\boldsymbol{J}=(J_1,J_2,\cdots,J_n)$为**作用变量**,$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$为**角变量**,$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$为**频率**.

完全可积哈密顿方程(6.62)的解为

$$\theta_i(t)=\omega_i t+\theta_i(0),\quad J_i(t)=J_i(0),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

进一步研究哈密顿方程要用到微分形式和辛流形、辛几何等

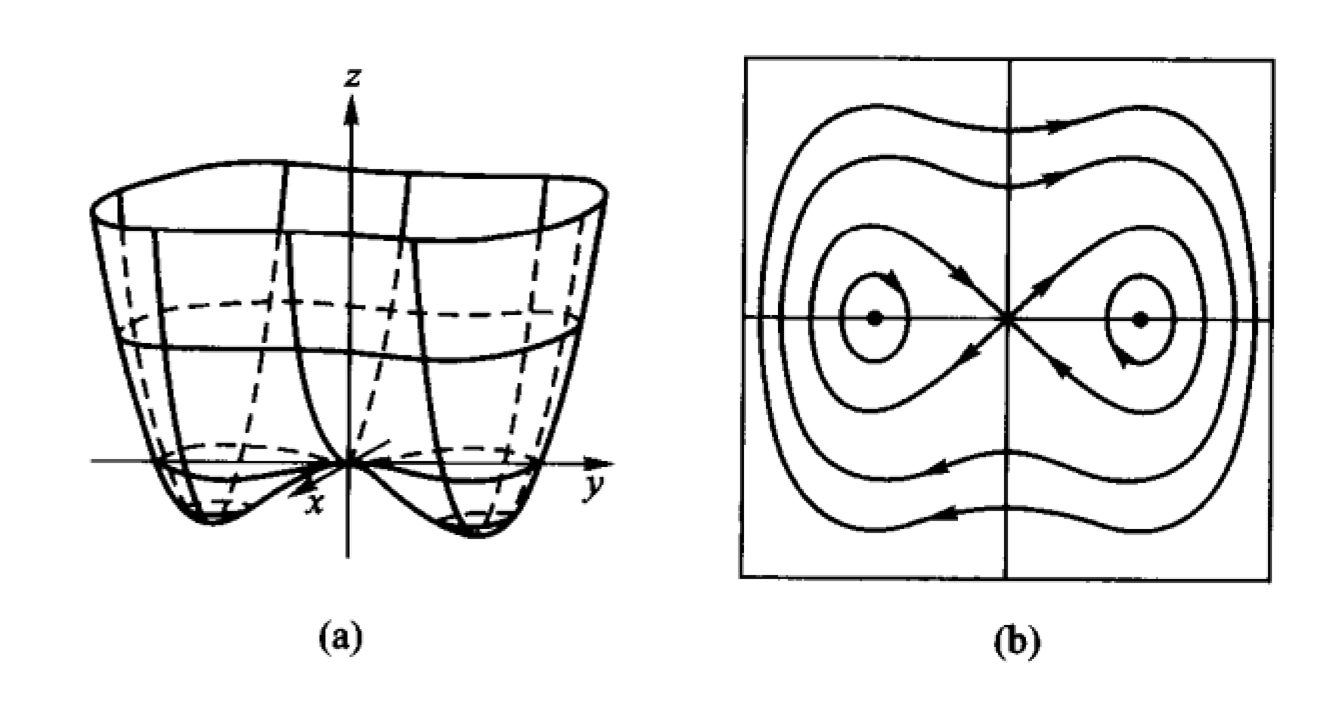
一系列概念、性质，这里我们只给出较容易理解的重要结果

定理 15(刘维尔完全可积定理) 如果 $2n$ 维哈密顿方程(6.62)存在 n 个对合的相互独立的首次积分 F，则哈密顿方程是完全可积的. 方程可以通过 n 个首次积分求解，其 n 个独立的对合的首次积分函数所确定的等值面(6.63)是紧的且连通的，对应(同胚)于 n 维不变环面.

例 1 微分方程 $\dot{x}=y,\dot{y}=x-x^3$ 是哈密顿方程，其哈密顿函数

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4,$$

如图(6.37).

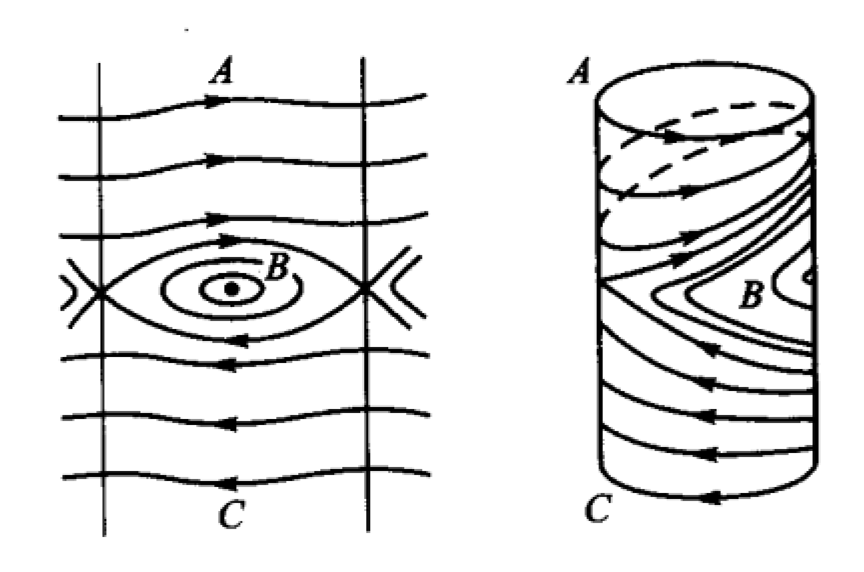


图(6.37) 哈密顿函数图 $H=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$

例 2 考虑§6.2 例 3 讨论的数学摆方程(6.16)，如取 $H=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)$，则(6.16)化为自由度为 $n=1$ 的二维哈密顿方程(6.62)，H 是其首次积分，因 $n=1$，数学摆方程完全可积，其可积函数为

$$H=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)=c,$$

如图(6.38).



图(6.38) 数学摆哈密顿函数图

例 3 两自由度的振动系统的哈密顿函数为

$$H(p_1,p_2,q_1,q_2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(p_i^2+\omega_i^2q_i^2),$$

它有两个独立的首次积分

$$F_i=p_i^2+\omega_i^2q_i^2,\quad i=1,2,$$

而且

$$\{F_1,F_2\}=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{\partial F_2}{\partial q_i}-\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\right)=0,$$

因此首次积分 F_1,F_2是对合的.根据刘维尔完全可积定理,两自由度的振动系统是完全可积的.

实际上,如令

$$p_i=\rho_i\sin\theta_i,\quad \omega_iq_i=-\rho_i\cos\theta_i,\quad i=1,2,$$

则可将原哈密顿方程(6.62)化为

$$\dot{\theta}_i=\omega_i,\quad \dot{\rho}_i=0,\quad i=1,2,$$

解得

$$\theta_i=\omega_it+\eta_i,\quad \rho_i=-\omega_iA_i,\quad i=1,2,$$

得到两自由度的振动系统的解

$$p_i = -\omega_i A_i \sin(\omega_i t + \eta_i), \quad q_i = A_i \cos(\omega_i t + \eta_i), \quad i = 1,2.$$

6.6.2 KAM 定理和 Mel′nikov 函数

现在讨论哈密顿方程受扰动后的性态以及平面哈密顿方程受扰动后存在混沌的条件. 刘维尔完全可积定理说明完全可积哈密顿方程可以通过变换把原哈密顿方程化为作用量－角变量坐标下的方程

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \boldsymbol{J}} = \boldsymbol{\omega} = \text{const}, \quad \dot{\boldsymbol{J}} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{0},$$

其中 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(F) = (J_1, J_2, \cdots, J_n)$ 为作用量, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ 为 n 维不变环面上的角变量. 新的哈密顿函数 $\overline{H} = \overline{H}(\boldsymbol{J})$ 仅为 $\boldsymbol{J}$ 的函数.

近可积哈密顿方程定义为一个完全可积哈密顿方程 $H_0(\boldsymbol{J})$ 的微小扰动

$$H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{J}) = H_0(\boldsymbol{J}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{J}), \tag{6.64}$$

其中 ε 足够小.

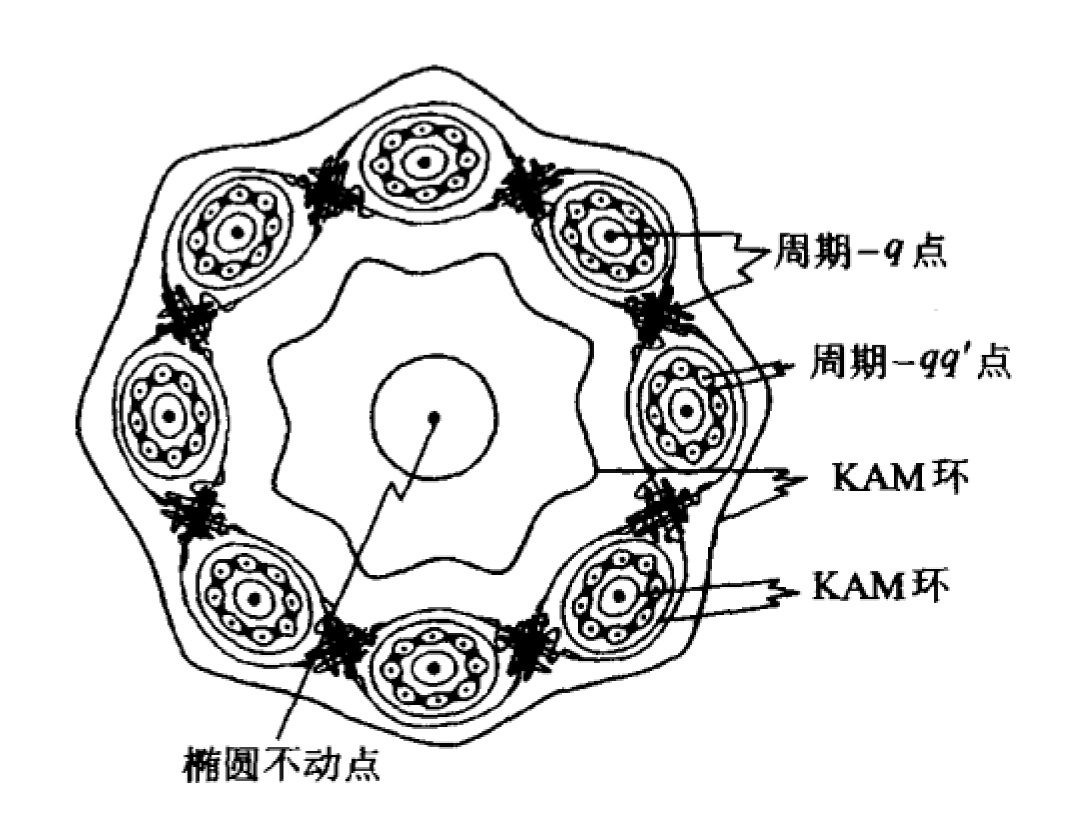
经 Kolmogorov 提出、Arnold 完善、Moser 发展得到了著名的

定理 16(KAM 定理) 如果哈密顿方程(6.62)是近可积和充分光滑的, 且未扰可积方程 $H_0(\boldsymbol{J})$ 的频率 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ 满足非共振条件

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \boldsymbol{J}} \neq 0,$$

则近可积哈密顿方程运动的定性性质和未扰可积哈密顿方程相同.

对满足 KAM 定理条件的近可积哈密顿方程仍存在 n 维不变环面, 虽与原未扰可积哈密顿方程的不变环面有所变形, 但拓扑结构不变, 被称为 KAM 环面, 如图(6.39)所示[30,33]. 在 KAM 环面内的小范围区域内亦可能存在混沌, 这能很好地解释太阳系的稳



图(6.39)　KAM 定理示意图

定性问题.

近可积哈密顿方程发生共振时不满足 KAM 定理条件,不出现 KAM 环面,运动轨线可能很复杂,出现混沌现象.

平面哈密顿方程(6.62)是完全可积方程,在相平面上的轨线是一簇闭轨或是趋于奇点的同宿轨或异宿轨,如果能用解析式表示其同宿轨或异宿轨,则对哈密顿方程的扰动,能用 Mel′nikov 方法给出存在混沌的条件.

在讨论 Mel′nikov 方法之前,先介绍斯梅尔提出的马蹄映射.斯梅尔在 20 世纪 60 年代初曾想在常微分方程定义的动力系统中寻找结构稳定的例子,结果发现了含有奇异吸引子的马蹄.

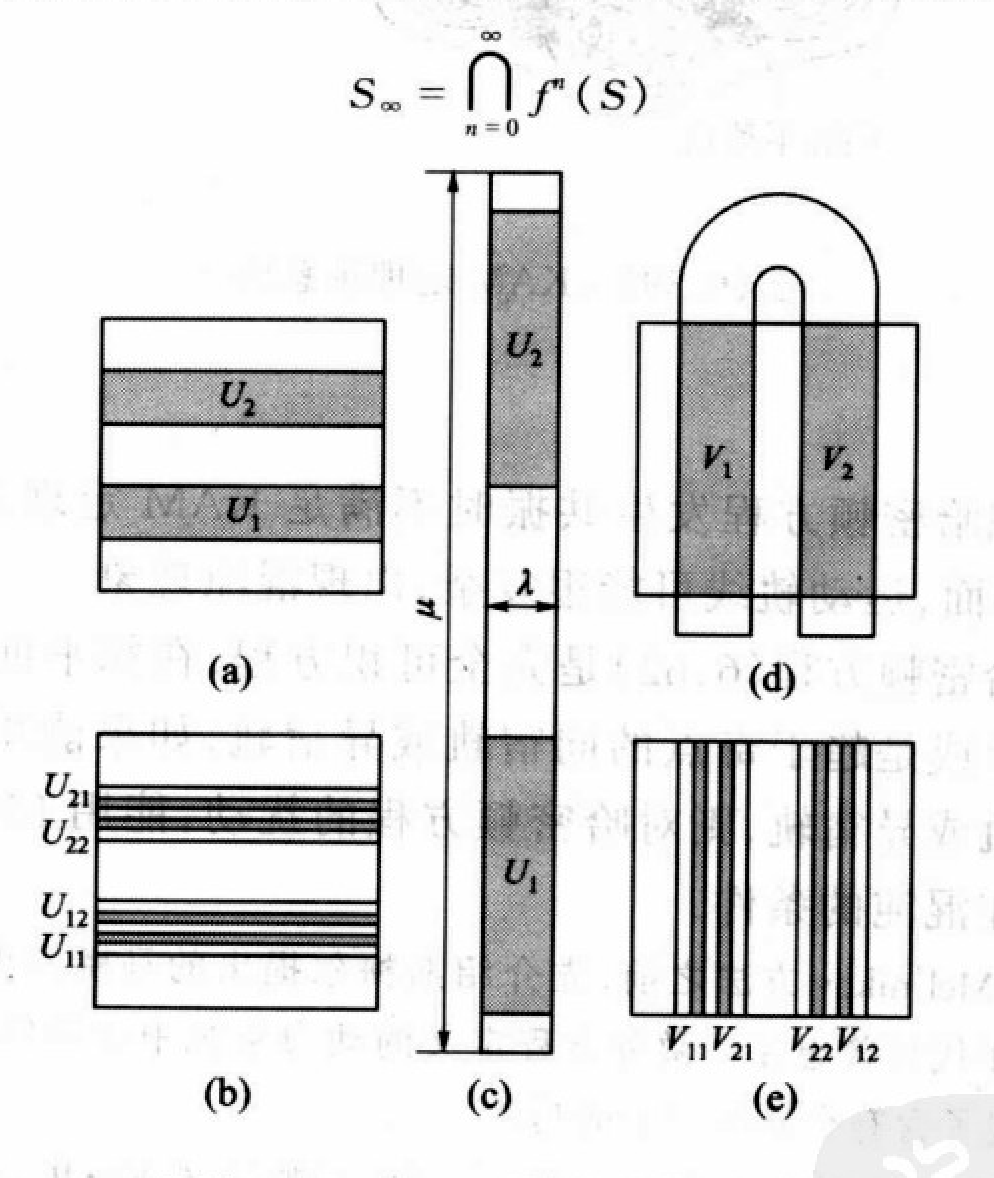
考虑平面 $\mathbf{R}^2$ 上的正方形 $S=[0,1]\times[0,1]$ 映射 $f:S\to\mathbf{R}^2$,如图(6.40),它在沿垂直方向将 S 拉长 $\mu(>2)$ 倍,在沿水平方向将 S 压缩 $\lambda\left(<\frac{1}{2}\right)$ 倍,然后弯曲成马蹄形状再放回正方形 S 上,使弯曲部分落在 S 之外,此弯曲的马蹄形便是 S 在映射 f 下的像 $f(S)$,映射 f 被称为 **Smale 马蹄映射**,简称马蹄映射或面包师变换.$f(S)$在 S 内的部分 $S\cap f(S)=V_1\cup V_2$,V_1,V_2 是宽为 λ 的垂直长方条,其原像为 $f^{-1}(S\cap f(S))=S\cap f^{-1}(S)=U_1\cup U_2$,$U_1$,

U_2是厚为 μ^{-1} 的水平长方条，有 $f(U_i)=V_i(i=1,2)$. 反复进行 f 映射，每次马蹄放在 S 的同样位置. 第二次马蹄留在 S 内的部分为 $S\cap f(S)\cap f^2(S)$，它是 V_1,V_2 内四个更窄的宽为 λ^2 的垂直长方条 $V_{ij}(i,j=1,2)$，V_{ij} 的二次原像 $f^{-1}(S\cap f(S)\cap f^2(S))=S\cap f^{-1}(S)\cap f^{-2}(S)$是四个 U_1,U_2 内的厚为 μ^{-2} 的水平长方条 $U_{ij}(i,j=1,2)$，有 $V_{ij}=f^2(U_{ij})$，$U_{ij}=f^{-2}(V_{ij})$. 如此继续，当 $n\to\infty$ 时，有

$$S_{-\infty}=\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(S)$$

是一系列由单位长度水平线段组成的康托(Cantor)集 C，表为$[0,1]\times C$；而

$$S_{\infty}=\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{n}(S)$$



图(6.40)　Smale 马蹄映射 $f(S)$

是一系列由单位长度垂直线段组成的康托集 C，表为 $C\times[0,1]$；而集合

$$\Lambda=S_{-\infty}\cap S_{\infty}=C\times C$$

是 Smale 马蹄映射 f 的不变集，即 $z\in\Lambda$ 时，对任整数 n，有 $f^n(z)\in\Lambda$，Λ 称为 **Smale 马蹄**.

为了解 Smale 马蹄 Λ 的性质，定义两个符号 $A=\{0,1\}$ 组成的符号动力系统. A 的元可组成双向无限符号序列

$$a=\cdots a_{-i}\cdots a_{-2}a_{-1}\overset{*}{a}_0 a_1 a_2\cdots a_i\cdots,$$

其中 $a_i\in A, i\in\mathbf{Z}$, 上方的有 * 标记的元 a_0 称为 a 的中位元. 符号序列的集合记为 $\Sigma=\{a\}$, 对 Σ 中另一元 $b=\cdots b_{-2}b_{-1}\overset{*}{b}_0 b_1 b_2\cdots$, 定义 a 与 b 的距离为

$$d(a,b)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i-b_i|\cdot 2^{-|i|},$$

于是 Σ 构成一距离空间. 由距离的定义，离中位元越远其值越小. a 的 $\varepsilon(>0)$ 邻域 $U_\varepsilon(a)=\{b\mid d(a,b)<\varepsilon\}$ 相当于 a 的一个中央区取 $a_{-N}\cdots a_{-1}\overset{*}{a}_0 a_1\cdots a_N$, 两边则可取 A 的任何元的序列，其中 $\frac{1}{2^N}<\varepsilon$.

在 Σ 上定义(左)移位映射

$$\sigma:\Sigma\to\Sigma,\quad \sigma(a)=b,\quad b_i=a_{i+1},\quad \forall i\in\mathbf{Z},$$

显然 σ^{-1}(右移)存在. (Σ,σ) 构成一动力系统，称为**符号动力系统**.

对 (Σ,σ) 动力系统，如果定义 $(a_1a_2\cdots a_n)'$ 为 n 位 $a_1a_2\cdots a_n$ 的两边无限循环，显然 $a=(a_1a_2\cdots a_n)'$ 为初值的轨道 $\{\sigma^k(a)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 n 周期轨道. 而以 $a=(\cdots 00a_{-n}\cdots a_{-1}a_0a_1\cdots a_n00\cdots)$, $a=(\cdots 11a_{-n}\cdots a_{-1}a_0a_1\cdots a_n11\cdots)$ 为初值的轨道 $\{\sigma^k(a)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 分别是极限点为序列全 0 及全 1 的同宿轨道; $a=(\cdots 00a_{-n}\cdots a_{-1}a_0a_1 11\cdots)$, $b=(\cdots 11a_{-n}\cdots a_{-1}a_0a_1 00\cdots)$ 为初值的轨道 $\{\sigma^k(a)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 及 $\{\sigma^k(b)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 则是极限点为序列全 1 及全 0 的异宿轨道.

任取 $a\in\Sigma$ 及 a 的任邻域 $U_\varepsilon(a)$, 显然 $U_\varepsilon(a)$ 内存在周期点，这只要将中央区在邻域的有限序列向两边无限循环即可，因此 Σ 的周期点集在 Σ 内处处稠密. 甚至可以定义一条轨道在 Σ 内处处稠密，其方法是作一符号序列 $\bar{a}$ 包含所有的周期序列(循环的不计)，这可按周期数 n 从小到大将 2^n 个满足周期数 n 的所有周期序列从中位起向右排列，中位起向左可取任何元 $\bar{a}=\cdots\overset{*}{0}\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111\cdots$, 这样构造的轨道 $\{\sigma^n(\bar{a})\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 在 Σ 内处处稠密. 此外，因 Σ 中的点是不可数的，否则按可数顺序可构造一个与每一点均不同的点而产生矛盾；而 Σ 中的周期点是可数的，

因此，Σ 中的非周期点是不可数的. 由距离的定义，任意周期及非周期轨道均是有界的.

现证对 Σ 中的任意轨道 a 均对初值敏感，实际上对任意小的 δ，只要取 n 充分大使得 $\frac{1}{2^n}<\delta$，于是只要令 b 为 a 中的第 n 位元 a_n 取反，其余元不变，则 $b\in U_\delta(a)$，但 $d(\sigma^n(a),\sigma^n(b))=1$，这证明了 a 对初值敏感，说明 Σ 是混沌集.

现将 Smale 马蹄 Λ 和符号动力系统 (Σ,σ) 联系起来，定义映射

$$\varphi:\Lambda\to\Sigma$$

$$\varphi(f(z))=\sigma\varphi(z),\quad \forall z\in\Lambda,$$

其中 $\varphi(z)=a=\cdots a_{-1}\dot{a}_0 a_1\cdots$，$f^i(z)=V_{a_i}$，当 $f^i(z)\in V_1$ 时，$a_i=0$；$f^i(z)\in V_2$ 时，$a_i=1$. 于是，如记 $f(z)=y$，$\varphi(y)=b\in\Sigma$，则应证 $b=\sigma(a)$. 实际上 $f^{i+1}(z)=f^i(f(z))=f^i(y)$，因此，$f^i(y)\in V_k\Leftrightarrow b_i=k-1\Leftrightarrow f^{i+1}(z)\in V_k\Leftrightarrow a_{i+1}=k-1$，得 $b_i=a_{i+1}$，即 $b=\sigma(a)$. 还可进一步证明 φ 是一一对应且连续(同胚)映射，于是 Λ,Σ 有同样的性质

(1) Λ,Σ 含有可数无穷多条任意周期的周期轨道；

(2) Λ,Σ 含有不可数无穷多条有界非周期轨道；

(3) Λ,Σ 含有一条在其上处处稠密的轨道；

(4) Λ,Σ 对初值敏感.

这证明了由康托集构成的不变集 Λ 具有对初值敏感、无法预测等混沌特性，虽然它不是 Li-Yorke 定义下的混沌，Λ,Σ 实际上是一个与普通的吸引子(集)不同的**奇异吸引子**.

前面提到，同宿轨道其两端均趋于同一奇点，此奇点称为同宿点，而同宿轨道实际上是由同宿点的稳定和不稳定流形合为一体构成. 当系统受到扰动时，同宿轨道会破裂，原来合为一体的稳定和不稳定流形变为相交或相切. 稳定和不稳定流形横截相交时其相交点或 Poincaré 映射点如 Smale 马蹄，对异宿点也有类似结果. 斯梅尔证明，对映射(微分同胚)是否具有 Smale 马蹄可以通过判别是否存在横截同宿(异宿)点确定，这是 Mel′nikov 方法的根据.

现在介绍 Mel′nikov 方法. 考虑

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t),\tag{6.65}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t+T)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 充分光滑，ε 为小

参数.假设

(1) $\dot{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$为一哈密顿方程,并有一个由双曲鞍点 $\boldsymbol{p}_0$产生的同宿轨道 $\boldsymbol{q}^0(t)$;

(2) 在 $\Gamma^0 = \{\boldsymbol{p}_0\} \cup \{\boldsymbol{q}^0(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$内充满周期轨道族 $\boldsymbol{q}^\alpha(t)$.

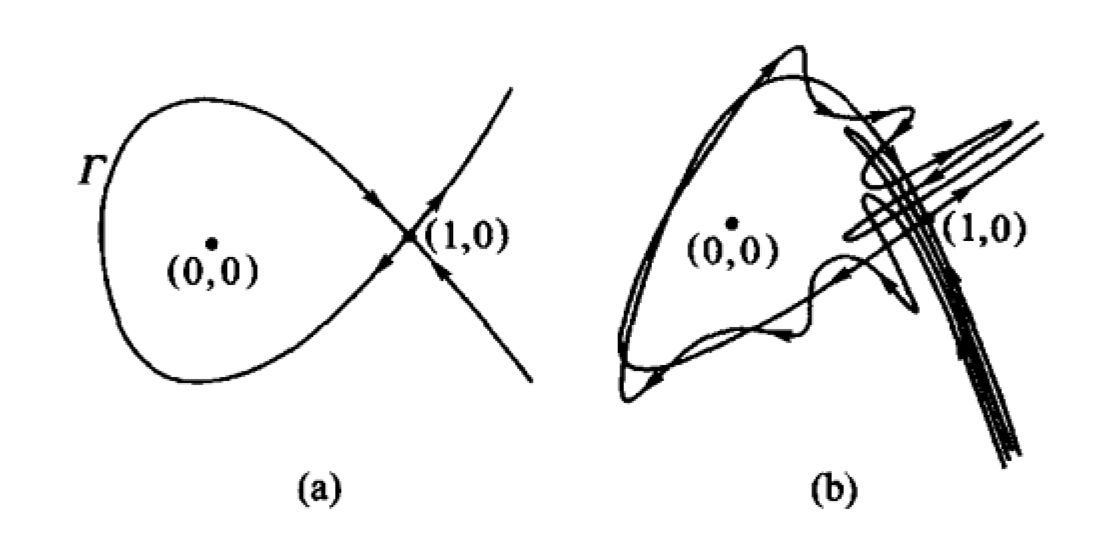
定义 Mel'nikov 函数为

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_0(t - t_0)) \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_0(t - t_0), t) \mathrm{d}t, \quad (6.66)$$

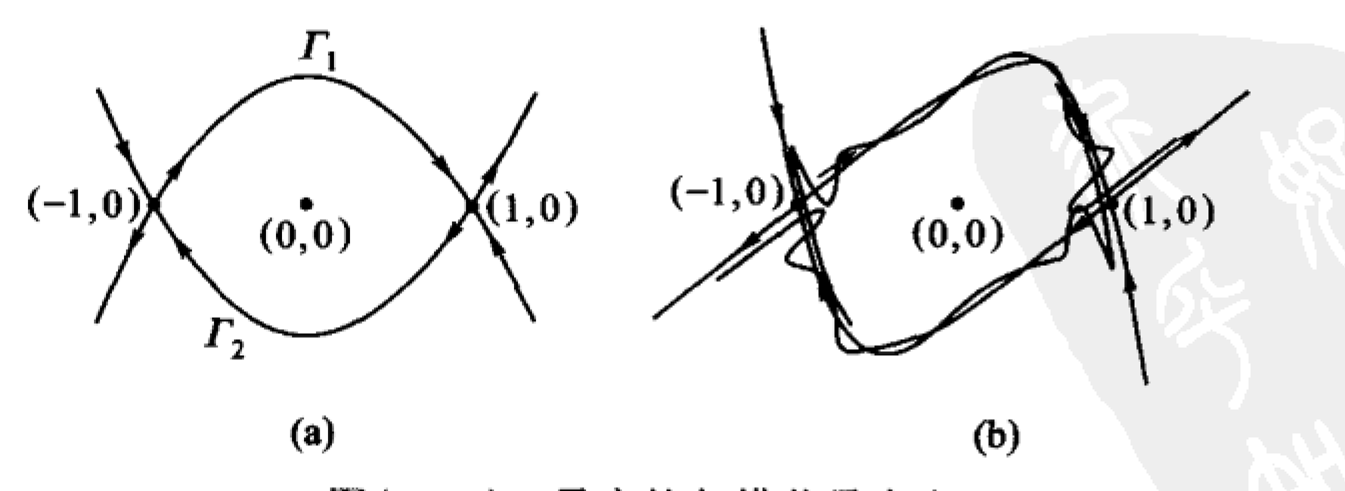
这里 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$为向量积的模.我们有

定理 17(Mel'nikov 定理) 若 Mel'nikov 函数 $M(t_0)$以 t_0为简单零点,即 $M(t_0) = 0, M'(t_0) \neq 0$,则当 ϵ 充分小时,方程(6.65)有横截同宿点,从而方程的解具混沌性态.

定理 17 是针对同宿轨的,如图(6.41).对异宿轨也有相应的 Mel'nikov 函数和 Mel'nikov 定理,当异宿轨的 Mel'nikov 函数 $M(t_0)$是 t_0的简单零点时亦有类似的结果,如图(6.42).



图(6.41) 同宿轨与横截同宿点



图(6.42) 异宿轨与横截异宿点

例 4 非线性振荡系统

$$\ddot{x}+x-x^2=\varepsilon\cos\omega t,$$

它可化为方程组

$$\dot{x}=y,\dot{y}=-x+x^2+\varepsilon\cos\omega t.$$

$\varepsilon=0$ 时是一哈密顿方程 $H=3x^2+3y^2-2x^3$，$H=1$ 对应同宿轨道 Γ^0

$$x=1-\frac{3}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}(t-t_0)\right),y=\frac{3}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}(t-t_0)\right)\tanh\left(\frac{1}{2}(t-t_0)\right).$$

通过计算，可得

$$M(t_0)=\frac{3\pi}{2}(4\omega^2-1)\mathrm{csch}\pi\omega\cdot\sin\omega t_0,$$

因此只要 $\omega\neq\pm\frac{1}{2}$，则 Mel'nikov 函数是 t_0 的简单零点.系统的解具混沌性态.

6.6.3 孤立子

绝大部分的常微分方程是不可解、不可积的，因此必须通过稳定性、定性理论方法研究常微分方程的解的性质.长期以来，可积性的研究处于低潮，但 20 世纪 60 年代以来，在自然界中发现一类有重要应用的孤立波或孤立子现象，而孤立子恰好对应于完全可积的哈密顿方程.

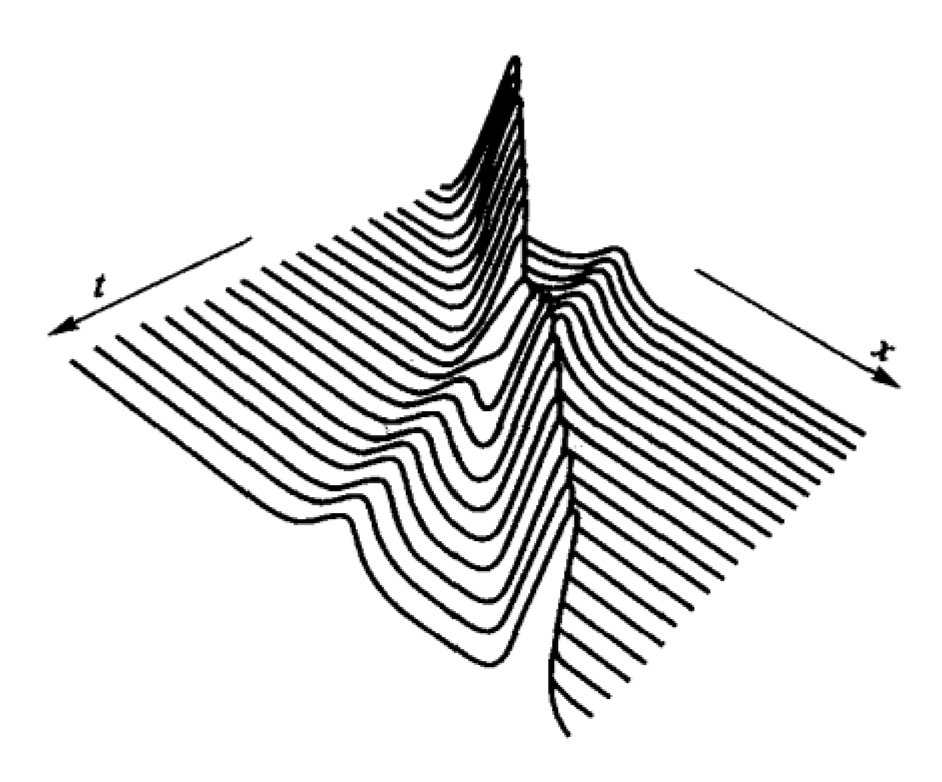
孤立子是由偏微分方程描述的一种有特殊性质的有孤立波形状的解，其能量不会耗散或分散.当两个或多个能量不同的孤立波在前进时，能量高的波会逐渐赶上并越过能量低的波而保持各自的波形.如图(6.43)所示.

考虑著名的 KdV 孤立子方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,\tag{6.67}$$

u_t,u_x 表示 $u=u(x,t)$ 分别对 t,x 的偏导数.设 u 存在形如 $u=\varphi(\xi),\xi=x-at$ 的行波解(见§7.1 例 1)，且 $\xi\to\pm\infty$ 时，$\varphi(\xi)\to$

0.将 $\varphi(\xi)$代入 KdV 方程可化得常微分方程



图(6.43) 两孤立子图

$$-a\varphi' + 6\varphi\varphi' + \varphi''' = 0,$$

其中 $\varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}$,积分得

$$-a\varphi + 3\varphi^2 + \varphi'' = c_1,$$

c_1为积分常数.上式乘以 φ'再积分之,得

$$-\frac{1}{2}a\varphi^2 + \varphi^3 + \frac{1}{2}\varphi'^2 - c_1\varphi = c_2,$$

c_2亦为积分常数.利用条件 $\xi \to \pm\infty$时,$\varphi(\xi) \to 0$,推得 $c_1 = c_2 = 0$,上式变为 $\varphi'^2 = \varphi^2(a - 2\varphi)$.最后可得到用双曲函数表示的精确解

$$u = \varphi(x - at) = \frac{1}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}(x - at - \xi_0)\right), \quad (6.68)$$

其中 ξ_0为积分常数,表示波峰的位置,波峰高$\frac{a}{2}$.

四位物理学家 GGKM(名字首字母)首先提出了解 KdV 方程初值问题的**反散射方法**,亦叫 GGKM 方法.其思想是将 KdV 方程的解 $u(x,t)$作为物理学上著名的 Schrödinger 方程

$$\psi_{xx} - (u(x,t) - \lambda)\psi = 0$$

的位势,把 t 作为参数.而 Schrödinger 方程是一类常微分特征值方程(见附录 I §4),和矩阵特征值和特征向量的性质类似,对给定的位势 u 有相对应的被称为散射数据的一组数据 $k_m, C_m(k_m)$, $R(k)$, $T(k)$ 及在 $\pm\infty$ 处有界的波函数,其中 k_m, k 分别为对应的离散和连续特征值.GGKM 的主要贡献是发现了位势 $u(x,0)$ 和 $u(x,t)$ 之间对应的散射数据有简单的关系

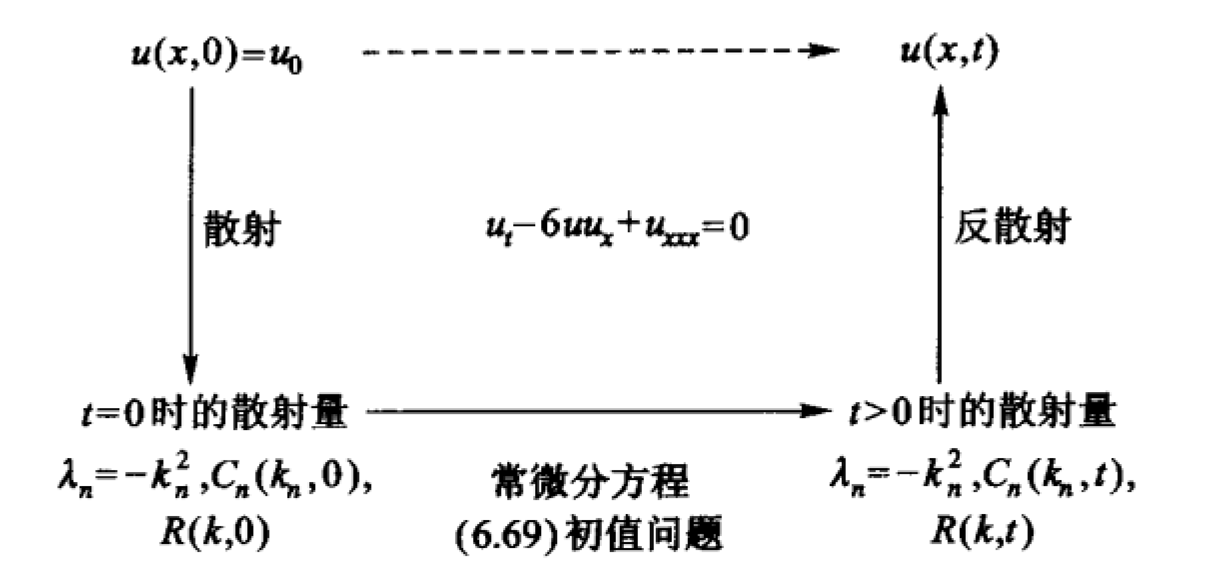
$$\begin{aligned}&\dot{k}_n(t) = 0, \quad \dot{k}(t) = 0, \quad \dot{C}_n(k_n, t) = 4k_n^3 C_n(k_n, t), \\ &\dot{R}(k,t) = 8ik^3 R(k,t), \quad \dot{T}(k,t) = 0.\end{aligned} \tag{6.69}$$

解相应的常微分方程,可得

$$\begin{aligned}&k_n(t) = k_n(0), \quad C_n(k_n, t) = C_n(k_n, 0)e^{4k_n^3 t}, \\ &R(k,t) = R(k,0)e^{8ik^3 t}, \quad T(k,t) = T(k,0).\end{aligned} \tag{6.70}$$

解 KdV 方程(6.67)初值问题 $u(x,0) = u_0(x)$ 的反散射方法就是先求出对应位势为 $u_0(x)$ 的 Schrödinger 方程的散射数据 $k_m, C_m(k_m), R(k), T(k)$ 及在 $\pm\infty$ 处有界的波函数,然后利用式(6.70)得到位势为 $u(x,t)$ 的 Schrödinger 方程的散射数据及在 $\pm\infty$ 处有界的波函数,再反过来用散射数据求得位势 $u(x,t)$,即 KdV 方程的解.这种求解非线性微分方程初值问题的反散射方法和解线性微分方程初值问题的 Fourier 变换方法非常相似,又称反散射方法为非线性 Fourier 变换方法.如图(6.44)所示.

研究表明 Schrödinger 方程的每一个离散特征值对应 KdV 方程的一个孤立子解,反之亦然,KdV 方程的初值函数为 $u_0(x) = -2\mathrm{sech}^2 x$ 时可用反散射方法求得与式(6.68)相同的单孤立子解;而用初值函数为 $u_0(x) = -6\mathrm{sech}^2 x$ 则可用反散射方法求得双孤立子解



图(6.44)　反散射方法

$$u(x,t)=-12\frac{3+4\cosh(8t-2x)+\cosh(64t-4x)}{(\cosh(36t-3x)+3\cosh(28t-x))^2},\tag{6.71}$$

双孤立子解图如图(6.43).

反散射方法可以推广应用到其他非线性微分方程,且进一步研究表明可用反散射方法求解的有重要应用的很多非线性微分方程都可对应完全可积的哈密顿方程,从而使经历百年沉寂的可积性的研究又掀起了热潮[31].

习题 6.6

1. 试证明泊松括号满足反对称、双线性和雅可比行列式.

2. 将下列方程化为哈密顿方程(令 $\dot{x}=y$),并画出其相图:

(1) $\ddot{x}+x-x^2=0$;

(2) $\ddot{x}+x-x^3=0$;

(3) $\ddot{x}-x+x^3=0$.

3. 计算例 4 中的 Mel'nikov 函数 $M(t_0)$.

4. 讨论非线性电容的振荡电路系统 $\ddot{x}+\varepsilon k\dot{x}+x-x^2=\varepsilon\mu\cos\omega t$,

(1) 求系统当 $\varepsilon=0$ 时的哈密顿函数;

(2) 求 $H(x,y)=1$ 时的同宿轨 Γ_0 的参数表示式;

(3) 计算同宿轨 Γ_0的 Mel′nikov 函数 $M(t_0)$；

(4) 求满足 $M(t_0)$有简单零点的系统混沌的条件.

5. 推导用双曲函数表示 $\varphi'^2=\varphi^2(a-2\varphi)$的精确解(6.68).

6. 在空间(x,t,u)中画出 KdV 方程的单、双孤立子解(6.68),(6.71)图.

本章学习要点

本章主要讨论非线性微分方程,包括稳定性、定性基本理论和分支、混沌问题及哈密顿方程.

与线性微分方程有本质的不同,非线性微分方程绝大多数是不可解、不可积的,这就提出能否仅从方程的结构判断其解的性态的问题.解的性态中最基本的是稳定性态.在§6.1 中首先给出稳定性的概念并讨论按线性近似决定微分方程零解的稳定性态及其判别方法.然后在§6.2 中介绍直接判断稳定性的李雅普诺夫 V 函数方法,包括 V 函数的定号性概念和用 V 函数判断稳定性的基本定理及线性微分方程组的 V 函数的构造. §6.3 中从最简单的常系数平面线性微分方程组着手,研究轨线在相平面上的性态,得到各种奇点类型.在§6.4 中则进一步讨论平面非线性微分方程组解的全局图貌,给出相平面上极限环的存在性判断方法和相平面轨线图貌画法.在§6.5 中讨论了单参数一维和二维微分方程的分支,并详细分析了 Lorenz 方程在相空间中的轨线性态从而引出奇异吸引子和混沌现象.最后在§6.6 中介绍了哈密顿方程的可积性、近可积与混沌问题及 KdV 方程的孤立子解. §6.5、§6.6 中虽然概念较多,但多用图形、例子说明,不涉及复杂的推导.

这一章的内容较多,提出了不少新的概念和方法.学习时,要抓住一条线索,就是为了判断微分方程解的性态,如何从线性、近似线性逐步深入到非线性.对稳定性,由线性系统稳定性的判别开

始，最后对非线性微分方程提出一般的 V 函数方法．对定性，从分析平面线性奇点类型出发，并由零解邻域的局部性态过渡到全局的图貌，包括相平面上的极限环及生态模型的全局性态．对分支问题，也是由简单到复杂，最后才引出混沌现象．

本章介绍的属于常微分方程理论中的主要的仍在发展中的几个方面：稳定性理论、定性理论、分支与混沌问题及哈密顿方程．线性常微分方程或方程组由于满足叠加原理，存在基本解组，其理论已较完善．但对非线性微分方程，还处于研究发展阶段．特别是近30年来发现了由分支而致混沌的复杂的新的类型的解，导致出现寻找自然及社会科学中的混沌现象的热潮，并产生新的科学方法论，冲击了几百年来牛顿的确定论．

非线性微分方程的这种新发展，是与计算机信息时代的出现密切相关的．正是由于计算机的发展，导致了由对初值敏感的混沌现象的发现，并可通过计算机进行数学实验和数学研究．本章中很多内容可以用计算机语言进行讨论，我们在附录Ⅱ中列出了有关程序，有条件的读者最好能结合这些程序进行学习．

第七章

一阶线性偏微分方程

由于一阶线性偏微分方程可以用常微分方程方法求解，因此在本书最后一章讨论一阶线性偏微分方程.先介绍线性及拟线性偏微分方程的基本概念，建立常微分方程首次积分和一阶线性偏微分方程的关系，并通过首次积分求解常微分方程组；然后再讨论一阶线性和拟线性偏微分方程的求解及其初始值问题（柯西问题）.

§7.1 基本概念

一阶偏微分方程是由自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$，未知函数 u 及其一阶偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ 组成的关系式

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (7.1)$$

当不致混淆时，有时将偏微分符号如 $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 记为 u_t, u_x, u_{x_i}.

相应地，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = X(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (7.2)$$

分别被称为一阶线性偏微分方程及一阶齐次线性偏微分方程；而

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; z)\frac{\partial z}{\partial x_j} = Z(x_1, x_2, \cdots, x_n; z) \quad (7.3)$$

则被称为一阶拟线性偏微分方程，其中函数 X_i, X, Y_j, Z 是相应变元的已知函数.

函数 $u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为偏微分方程(7.1)的**解**，如果它在$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$空间的某个域 D 内连续和存在一阶偏导数，当把它们代入 F 的相应变元时，能使得方程(7.1)对于这些自变量成为恒等式. 如果解是方程的一切解的一般表示式，则称此解为通解. 解 $u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以想像为在空间$(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$中的一张 n 维曲面，通常称为偏微分方程(7.1)的**积分曲面**.

例 1 考虑最简单的一阶齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad 即\ u_x + cu_y = 0 \quad (c = \text{const} > 0), \quad (7.4)$$

如令 $u = f(\xi)$，其中 $\xi = y - cx$，f 为任意可微函数，则 $u_x = -cf'$，$u_y = f'$，代入方程(7.4)变恒等式，因此 $u = f(\xi)$ 为方程(7.4)的解. 其解描述了以速度 c 向右传播而不改变形状的波，称为行波，称解为行波解.

例 2 考虑拟线性方程

$$u_x g_y(x, y, u) - u_y g_x(x, y, u) = 0,$$

其中 g 为已知函数.

设 $u = u(x, y)$ 为方程的任一解，记 $v(x, y) = g(x, y, u(x, y))$，则由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} &= u_x v_y - u_y v_x \\ &= u_x(g_y + g_u \cdot u_y) - u_y(g_x + g_u \cdot u_x) \\ &= u_x g_y - u_y g_x = 0,\end{aligned}$$

推知 u 与 v 之间存在着函数关系,即

$$\Phi(u,g(x,y,u))=0 \quad 或 \quad u=\varphi(g(x,y,u)).$$

注意到 u 的任意性,可知上述关系式所确定的隐函数就是方程的通解,这里 Φ 和 φ 分别为其变元的任意可微函数.

特别地,取 $g=uy-x$,则拟线性方程变为 $u_y+uu_x=0$,它的解由关系式 $u=\varphi(uy-x)$ 所确定.

上述求解过程是针对具体方程给出的,我们将看到,一般的齐次线性方程(7.2)的求解过程与写成对称形式的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{7.5}$$

发生密切的关系.我们称方程(7.5)为齐次线性偏微分方程(7.2)的**特征方程**.拟线性偏微分方程(7.3)的求解问题则可化为(7.2)的方程类型来处理.下面逐一介绍这些问题.

§7.2 一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系

一阶线性偏微分方程和常微分方程组的首次积分密切相关.考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x;y_1,\cdots,y_n),\\ y_i(x_0)=y_i^0,\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n, \tag{7.6}$$

其中 f_i 在域 G 内满足存在唯一性定理的条件(见第六章),根据这一定理,上述初值问题在包含点 $(x_0;y_1^0,\cdots,y_n^0)$ 的某个域内有唯一的一组解

$$y_i=\varphi_i(x;x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0),\ i=1,2,\cdots,n.$$

利用解的唯一性,不难由此推出关系式

$$y_i^0 = \varphi_i(x_0; x, y_1, \cdots, y_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{7.7}$$

容易看出,(7.7)的每一个关系式的右端函数 φ_j 都有这样的特性:设 $y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 为方程组(7.6)的经过点$(x_0; y_1^0, \cdots, y_n^0)$附近的任一解,当把它们代入 φ_j 时,所得的将是一个常数,且此常数值随不同解而异,这种函数 φ_j 就称为方程组(7.6)的**首次积分**,或更确切地定义如下:

在域 G 内连续可微且不恒等于常数的函数$\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$,如果其中的变元 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$用方程组(7.5)的任一解 $y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$代替时,它就取常数值(对不同的解,常数值也不同),则关系式 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n) = c$ 称为方程组(7.5)的首次积分(有时也称 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$为首次积分),这里 c 为可允许范围内的任意常数.

方程组(7.6)的 n 个首次积分 $\psi_j(x, y_1, \cdots, y_n) = c_j(j=1,2,\cdots,n)$称为**彼此独立**的,如果雅可比行列式

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2 \cdots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_n} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

在 G 内恒不为 0. 对于对称形方程组(7.5)的 $n-1$ 个首次积分 $\varphi_j(x_1, x_2 \cdots, x_n)(j=1,2,\cdots,n-1)$,则用矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

的秩为 $n-1$ 来定义它们的彼此独立性.

下面讨论常微分方程组与一阶线性偏微分方程之间的关系.

先看 $n=1$ 的情形,即考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{7.8}$$

设它的通解为 $y=\varphi(x,c)$,从中解出 c 即得

$$\psi(x,y)=c.$$

显然,这是方程(7.8)的首次积分,今以方程的任一解 $y(x)$代入,然后对 x 微分这一等式就得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

或

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}f(x,y)=0,$$

即 $u=\psi(x,y)$为一阶齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{7.9}$$

的解.

反之,设 $u=u(x,y)$为方程(7.9)的解,以方程(7.8)的任一解 $y(x)$代入后,再对 x 微分,我们将得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

或

$$u(x,y(x))=\mathrm{const}.$$

这表明 $u(x,y)=c$ 是方程(7.8)的首次积分.

综合上述可得"$u=u(x,y)$为(7.9)的解的充要条件是 $u(x,y)=c$ 为方程(7.8)的首次积分."

这一结论对于 $n>1$ 的一般情况也成立.事实上,我们有下面定理.

定理 1 $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$ 是方程组(7.6)的首次积分的充

要条件是在域 G 内成立着等式

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial \psi}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial \psi}{\partial y_n}=0. \tag{7.10}$$

证明 由存在定理知，对于任一点$(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\in G$，方程组(7.6)存在唯一解 $y_i=\varphi_i(x)$，满足条件 $y_i^0=\varphi_i(x_0)(i=1,2,\cdots,n)$.

若 $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$ 为首次积分，则 $\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))=\mathrm{const}$，从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))=0.$$

特别地，当 $x=x_0$时，有

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x_0;y_1^0,\cdots,y_n^0)\frac{\partial}{\partial y_i}\psi(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)=0$$

再由$(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\in G$ 的任意性，推知等式(7.10)在 G 内成立.

反之，若等式(7.10)在 G 内成立，自然于方程组(7.6)的解有意义之处也成立，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))=\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial \psi}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial \psi}{\partial y_n}\right)\Bigg|_{\substack{y_i=\varphi_i(x),\\ i=1,2,\cdots,n}}=0$$

或

$$\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi(x))=\mathrm{const},$$

即 $\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$ 是方程组(7.6)的首次积分.

§7.3 利用首次积分求解常微分方程组

考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x;y_1,\cdots,y_n),\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{7.11}$$

假设 f_i 于闭域 $\mathscr{D}$ 上连续可微,从而解的存在唯一性定理成立,我们有

定理 2 如果

$$\psi_j(x,y_1,\cdots,y_n)=c_j,\quad j=1,2,\cdots,n\tag{7.12}$$

是方程组(7.11)的 n 个彼此独立的首次积分,则方程组(7.11)的任一解均可由(7.12)通过选取适当的一组常数值 c_j 而确定.

证明 依定义 $\frac{\partial(\psi_1,\psi_2\cdots,\psi_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\neq0$,从而由(7.12)可以确定出函数

$$y_i=\varphi_i(x;c_1,\cdots,c_n),\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{7.13}$$

且 $\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}$ 存在、连续.

首先,我们证明(7.13)是方程组(7.11)的解.事实上,显然

$$\psi_j(x,\varphi_1(x;c_1,\cdots,c_n),\cdots,\varphi_n(x;c_1,\cdots,c_n))=c_j,$$
$$j=1,2,\cdots,n,$$

因而

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}=0,$$
$$j=1,2,\cdots,n.\tag{7.14}$$

另一方面,由于 $\psi_j=c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是(7.11)的首次积分,根据定理 1,在 $\mathscr{D}$ 上有

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j + f_1\frac{\partial \psi_j}{\partial y_1} + \cdots + f_n\frac{\partial \psi_j}{\partial y_n} = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

特别地对 $y_i = \varphi_i(x;c_1,\cdots,c_n)(i=1,2,\cdots,n)$成立,即

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x;\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\frac{\partial}{\partial y_i}\psi_j(x,\varphi_1,\cdots,\varphi_n) = 0,$$

$$j = 1,2,\cdots,n. \qquad (7.15)$$

于是由(7.14)减去(7.15)得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\left[\frac{d\varphi_i}{dx} - f_i(x;\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\right] = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

注意到$\frac{\partial(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)}{\partial(y_1,y_2\cdots,y_n)} \neq 0$,由上式推知

$$\frac{d\varphi_j}{dx} = f_j(x;\varphi_1,\cdots,\varphi_n), \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

这表明

$$y_j = \varphi_j(x;c_1,\cdots,c_n), \quad j = 1,2,\cdots,n \qquad (7.13)$$

为方程组(7.11)的解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.

现设方程(7.11)的任一解

$$y_i = \tilde{\varphi}_i(x;x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n), \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

记 $\bar{c}_i = \psi_i(x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,则由上述知 $\bar{y}_i = \varphi_i(x;\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)(i=1,2,\cdots,n)$为方程组(7.11)的解.注意到 $\tilde{\varphi}_i(x_0;x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n) = \bar{y}_i = \varphi_i(x_0;\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)(i=1,2,\cdots,n)$,由解的唯一性,推知

$$\varphi_i(x,\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n) = \tilde{\varphi}_i(x;x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n), \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

从而 $y_i = \tilde{\varphi}_i(x;x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)(i=1,2,\cdots,n)$由(7.12)所确定,只需取 $c_i = \bar{c}_i = \psi_i(x_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)(i=1,2,\cdots,n)$.证毕.

方程组(7.11)的 n 个彼此独立的首次积分的全体(7.12)称

为(7.11)的**通积分**.显然,求解方程组(7.11)的问题就归结为寻求它的 n 个彼此独立的首次积分.

如何求首次积分呢?没有一定的方法,但如果能得到常微分方程的含任意常数的通解 $y=\varphi(x,c)$ 或 $\psi(y,x,c)=0$,则当 $\dfrac{\partial\varphi(x,c)}{\partial c}\neq 0$ 或 $\dfrac{\partial\psi(y,x,c)}{\partial c}\neq 0$ 时,可解出 $c=\Phi(x,y)$,$\Phi(x,y)$ 即为首次积分.还可以通过构造全微分 $\mathrm{d}\Phi(x,y)=0$ 得到首次积分 $\Phi(x,y)$.对方程组(7.11)因需要求得 n 个彼此独立的首次积分,更好的办法是将其写成对称形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{g_0}=\frac{\mathrm{d}y_1}{g_1}=\frac{\mathrm{d}y_2}{g_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}y_n}{g_n},$$

其中 $g_j=g_0f_j(j=1,2,\cdots,n)$.如能求得 $n+1$ 个不同时为零的函数 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n$ 使得

1° $\mu_0g_0+\mu_1g_1+\cdots+\mu_ng_n=0$;

2° $\mu_0\mathrm{d}x+\mu_1\mathrm{d}y_1+\cdots+\mu_n\mathrm{d}y_n=\mathrm{d}\varphi$,$\varphi$ 是某个函数,

则 $\varphi=c$ 就是方程的一个首次积分.

例 1 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-z^2},\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xz}{x^2-y^2-z^2}.\end{cases}$$

解 将方程写成对称的形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2-y^2-z^2}=\frac{\mathrm{d}y}{2xy}=\frac{\mathrm{d}z}{2xz},\tag{7.16}$$

由后一等式得到方程组的一个首次积分 $\dfrac{y}{z}=c_1$.

为了得到另一个首次积分,我们用 x 乘(7.16)的第一个分式的分子和分母,用 y 乘第二个分式的分子和分母,用 z 乘第三个

分式的分子和分母，然后将分式的分子、分母对应相加，根据比例的性质就得到

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{\mathrm{d}y}{2xy},$$

由此得到方程组的又一个首次积分

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2.$$

易证上述两个首次积分是彼此独立的，因此方程组的通积分可表为

$$\begin{cases}\dfrac{y}{z}=c_1,\\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2.\end{cases}$$

例 2 求方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}z}{xy}$$

的通积分.

解 这里 $g_0=xz, g_1=yz, g_2=xy$，取 $\mu_0=y, \mu_1=x, \mu_2=-2z$，就有 $\mu_0g_0+\mu_1g_1+\mu_2g_2=0$，而 $\mu_0\mathrm{d}x+\mu_1\mathrm{d}y+\mu_2\mathrm{d}z=\mathrm{d}(xy-z^2)$，于是 $xy-z^2=c_1$ 为方程的首次积分.

又从方程组的第一个等式，得 $\frac{x}{y}=c_2$，它也是方程组的首次积分，并且易知它与前一首次积分是彼此独立的. 因此我们得到方程组的通积分

$$\begin{cases}xy-z^2=c_1,\\ \dfrac{x}{y}=c_2.\end{cases}$$

例 3 求解方程组

$$\frac{A\mathrm{d}x}{(B-C)yz}=\frac{B\mathrm{d}y}{(C-A)zx}=\frac{C\mathrm{d}z}{(A-B)xy},$$

其中 A,B,C 为常数.

解 取 $\mu_0=\frac{A}{B-C}x,\mu_1=\frac{-B}{C-A}y,\mu_2=0$,而得第一个首次积分

$$\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2=c_1,$$

类似地取 $\mu_0=0,\mu_1=\frac{B}{C-A}y,\mu_2=\frac{-C}{A-B}z$,就得另一个首次积分

$$\frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2=c_2,$$

并且它跟前一首次积分是彼此独立的,于是它们构成方程组的通积分.

§7.4 一阶线性偏微分方程的解法

这一节将讨论一阶齐次线性和拟线性偏微分方程的通解的结构.

首先考虑一阶齐次线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\tag{7.2}$$

假设 $X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 于某域 D 内是所有变元的连续可微函数,并且处处不同时为零.

由上面讨论知道,方程(7.2)的解必为常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}\tag{7.5}$$

的首次积分,反之亦然.下面讨论方程(7.2)的通解的结构,我们有

定理 3 设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程(7.5)的 $n-1$ 个彼此独立的首次积分,则方程(7.2)的通解可表

为

$$u=\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}), \tag{7.17}$$

其中 Φ 是其变元的任意连续可微函数.

证明 首先证明 $\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})=c$($c$ 为任意常数)是(7.5)的首次积分,从而(7.17)为方程(7.2)的解.

事实上,依假设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$在 D 内处处不同时为零,不妨设 $X_n\neq 0$,于是方程(7.5)的解可表为 $x_j=\varphi_j(x_n)(j=1,2,\cdots,n-1)$(即视 x_n 为自变量),又 $\psi_i=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程(7.5)的首次积分,因此有

$$\psi_i(\varphi_1(x_n),\varphi_2(x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_n),x_n)=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

$c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$为相应确定的常数,从而

$$\Phi(\psi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\psi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n))\Big|_{\substack{x_j=\varphi_j(x_n),\\ j=1,2,\cdots,n-1}}=\text{const},$$

这表明 $\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})=c$ 为方程(7.5)的首次积分.

其次证明(7.17)是方程(7.2)的通解,这只须证明对于方程(7.2)的任一解 $u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,必定存在关系 $\widetilde{\Phi}$,使得 $\varphi=\widetilde{\Phi}(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})$成立.事实上,我们有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial\psi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0,\\ \qquad\qquad j=1,2,\cdots,n-1.\end{cases} \tag{7.18}$$

依假设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$在 D 内处处不同时为零,由线性代数方程组的基本理论推知,对于(7.18)必有

$$\frac{\partial(\varphi,\psi_1,\cdots,\psi_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}\end{vmatrix}=0,$$

这就是说 $\varphi,\psi_1,\cdots,\psi_{n-1}$ 是函数相关的，即它们之间存在着函数关系，而已知 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}$ 彼此独立，因此 φ 可由 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}$ 表示，即 $\varphi=\tilde{\Phi}(\psi_1,\psi_2\cdots,\psi_{n-1})$.

这一事实也可直接证明如下：为书写方便，取 $n=3$，注意到

$$\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(x_1,x_2)}\neq 0,$$

我们可以从关系式 $u_1=\psi_1(x_1,x_2,x_3)$，$u_2=\psi_2(x_1,x_2,x_3)$ 中解出

$$x_1=\omega_1(x_3,u_1,u_2),\quad x_2=\omega_2(x_3,u_1,u_2),$$

于是

$$u=\varphi(x_1,x_2,x_3)=\varphi(\omega_1,\omega_2,x_3)=\tilde{\Phi}(u_1,u_2,x_3).$$

余下只须证明 $\tilde{\Phi}$ 与 x_3 无关，即 $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x_3}=0$，为此，注意到 $\frac{\partial(\varphi,\psi_1,\psi_2)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=0$，我们有

$$\begin{vmatrix}\mathrm{d}u & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\\ \mathrm{d}u_1 & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\\ \mathrm{d}u_2 & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}dx_3 & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}dx_3 & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}dx_3 & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} dx_3 = 0,
$$

或者展开为

$$
\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} du_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} du_2 = 0,
$$

又因$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$,上式可写为

$$
du = M_1 du_1 + M_2 du_2. \tag{7.19}
$$

另一方面,我们有

$$
du = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_3} dx_3, \tag{7.20}
$$

由(7.20)减去(7.19)

$$
\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u_1} - M_1\right) du_1 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u_2} - M_2\right) du_2 + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_3} dx_3 = 0,
$$

即
$$
\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u_1} - M_1\right)\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}dx_3\right)
$$

$$+\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)+\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3=0,$$

由于 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$ 彼此无关,故在上式中它们的系数必须同时为零,即

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_1}-M_1\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}=0,$$

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_1}-M_1\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}=0,$$

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_1}-M_1\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}+\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_2}-M_2\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x_3}=0.$$

由前两式推出 $\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_1}=M_1, \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u_2}=M_2$,再由最后一式推知 $\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x_3}=0$,于是 $u=\widetilde{\Phi}(u_1, u_2)$,即 $\varphi=\widetilde{\Phi}(\psi_1, \psi_2)$. 证毕.

正是因为称偏微分方程的解为积分曲面,积分曲面由特征曲线组成.而首次积分代表特征曲线,要通过对应的常微分方程求首次积分.因此将对称形常微分方程(7.5)称为齐次线性方程(7.2)的特征方程.

例 1 求方程 $\alpha u_x+\beta u_y=0$ 的通解,其中 α, β 为常数.

解 特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{\alpha}=\frac{\mathrm{d}y}{\beta}$,易见 $\beta x-\alpha y=c$ 为其首次积分,因此所求通解为 $u=\Phi(\beta x-\alpha y)$,其中 $\Phi(\xi)$ 为 ξ 的任意连续可微函数.这正与§7.1 例 1 的结果一样.

例 2 求 $yz_x-xz_y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $\frac{\mathrm{d}x}{y}=-\frac{\mathrm{d}y}{x}$,而 $x^2+y^2=c$ 为其首次积分,于是所求通解为 $z=\omega(x^2+y^2)$,其中 ω 为任意连续可微函数.

例 3 求解方程

$$\frac{B-C}{A}yz\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{C-A}{B}zx\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{A-B}{C}xy\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

解 特征方程为

$$\frac{A\mathrm{d}x}{(B-C)yz}=\frac{B\mathrm{d}y}{(C-A)zx}=\frac{C\mathrm{d}z}{(A-B)xy},$$

由§7.3 例 3 知

$$\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2=c_1,\ \frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2=c_2$$

是它的两个彼此独立的首次积分,因此所求方程的通解为

$$u=\Phi\left(\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2,\frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2\right),$$

其中 Φ 为任意连续可微函数.

例 4 求 $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$ 的通解.

解 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n},$$

容易求得它的 $n-1$ 个彼此独立的首次积分

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\frac{x_2}{x_n}=c_2,\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},$$

于是原方程的通解可表为

$$z=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

其中 $\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$ 为 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$ 的任意连续可微函数.

现在转入讨论一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_1,\cdots,x_n;z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n;z)\qquad(7.3)$$

的求解问题,假定 $Y_i(x_1,\cdots,x_n;z)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $Z(x_1,\cdots,x_n;z)$ 于某区域内是所有变元的连续可微函数,并且在所讨论区域内处处有 $\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\neq0$. 为书写方便,我们以 $n=2$ 的情形,即

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2; z) \qquad (7.21)$$

为例进行讨论.

设(7.21)的解表为隐函数形式

$$u(x_1, x_2; z) = 0, \qquad (7.22)$$

我们来分析一下,函数 u 必须满足什么关系.

设$\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$,于是可从(7.22)解出 $z = f(x_1, x_2)$,从而

$$u(x_1, x_2; f(x_1, x_2)) = 0.$$

分别对 x_1 和 x_2 微分上恒等式,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

因而

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \quad i = 1, 2.$$

将 $z = f(x_1, x_2)$ 及上述关系式代入方程(7.21),并注意到 $z = f(x_1, x_2)$ 为(7.21)的解,可得

$$-\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; z)\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}} = Z(x_1, x_2; z),$$

或

$$Y_1(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial x_1} + Y_2(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial x_2} + Z(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

即函数 u 满足一阶齐次线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial x_i} + Z(x_1, x_2; z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad (7.23)$$

且当以(7.22)所确定的 $z = f(x_1, x_2)$ 代入时,(7.23)式成立.

反之，若 $u(x_1, x_2; z)$ 是(7.23)的解，且 $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$，则易见(7.22)就是方程(7.21)的隐式解.

设 $\psi_i(x_1, x_2; z) = c_i(i=1,2)$ 是(7.23)的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{Y_2} = \frac{\mathrm{d}z}{Z}$$

的两个彼此独立的首次积分，则由定理3，方程(7.23)的通解可表为 $u = \Phi(\psi_1, \psi_2)$，其中 $\Phi(u_1, u_2)$ 是 u_1, u_2 的任意连续可微函数.

现证当 $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \neq 0$ 时，$\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0$ 就是方程(7.21)的通解，即若 $z = g(x_1, x_2)$ 是(7.21)的某一解，则它必包含在 $\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0$ 之中，也即当选取 Φ 为某一函数时，以 $z = g(x_1, x_2)$ 代入 $\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0$ 就得到关于 x_1, x_2 的等式.

事实上，由定理1我们有

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2)) \frac{\partial \psi_j(x_1, x_2; g(x_1, x_2))}{\partial x_i} + Z(x_1, x_2; g(x_1, x_2)) \frac{\partial \psi_j(x_1, x_2; g(x_1, x_2))}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2,$$

同时，又有

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2)) \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2; g(x_1, x_2)).$$

由上述等式就得到

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2)) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = 0, \quad j = 1, 2,$$

或令 $\varphi_i(x_1, x_2) = \psi_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2)) \ (i = 1, 2)$，而将上式写为

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1, x_2; g(x_1, x_2)) \frac{\partial \varphi_j(x_1, x_2)}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2.$$

此式表明 $u=\varphi_j(x_1,x_2)(j=1,2)$ 均为方程

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i(x_1,x_2;g(x_1,x_2))\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \tag{7.24}$$

的解.但(7.24)是两个自变量的一阶齐次线性偏微分方程,由定理3知,它的任两个解之间必存在着函数关系.于是必有 Φ 使 $\Phi(\varphi_1(x_1,x_2),\varphi_2(x_1,x_2))=0$,因此 $\Phi(\psi_1,\psi_2)=0$ 是(7.21)的通解.

易见上述讨论过程对于 $n>2$ 的情形也完全适用.因此,我们得到关于一阶拟线性偏微分方程(7.3)的通解结构的如下定理.

定理 4 设 $\psi_i(x_1,\cdots,x_n;z)=c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{Y_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{Y_n}=\frac{\mathrm{d}z}{Z} \tag{7.25}$$

的 n 个彼此独立的首次积分,那么,若

$$\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)=0, \tag{7.26}$$

这里 $\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 为 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的任意连续可微函数,并能从(7.26)确定函数 $z=z(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则(7.26)即为拟线性方程(7.3)的通解.

方程(7.25)称为拟线性方程(7.3)的**特征方程**.

例 5 求解线性方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$.

解 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2-y^2},$$

容易求得它的两个彼此独立的首次积分

$$x^2+y^2=c_1 \quad 和 \quad xy+z=c_2,$$

因此,所求偏微分方程的通解为

$$\Phi(x^2+y^2,xy+z)=0,$$

其中 $\Phi(u_1,u_2)$ 为 u_1,u_2 的任意连续可微函数.

例 6 求解拟线性方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}=z$.

解 特征方程为$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$,易见 $y=c_1$就是它的一个首次积分.为了求其另一个首次积分,可将 $y=c_1$代入上述方程,然后积分可得

$$z=c_2e^{\frac{x}{c_1}}.$$

最后得到两个首次积分 $y=c_1$和 $ze^{-\frac{x}{y}}=c_2$.经检验它们还是彼此独立的,因此所求偏微分方程的通解可表为

$$\Phi(y,ze^{-\frac{x}{y}})=0,$$

其中 $\Phi(u_1,u_2)$为 u_1,u_2的任意连续可微函数.

例 7 试求方程

$$(y-bz)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

的通解,这里 a,b 为常数.

解 不难求出特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{y-bz}=\frac{\mathrm{d}y}{-(x-az)}=\frac{\mathrm{d}z}{bx-ay}$$

的两个首次积分

$$\psi_1\equiv ax+by+z=c_1,$$

$$\psi_2\equiv x^2+y^2+z^2=c_2,$$

并且矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & 1\\ 2x & 2y & 2z\end{bmatrix}$$

的秩等于 2,即 $\psi_1=c_1$与 $\psi_2=c_2$彼此独立,于是所求通解为

$$\Phi(ax+by+z,x^2+y^2+z^2)=0,$$

其中 $\Phi(u_1,u_2)$为 u_1,u_2的任意连续可微函数.

§7.5 柯西问题

上述一阶线性(拟线性)偏微分方程的求解过程,可以用几何的语言给予直观的解释.考虑三维空间的一个连续向量场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中 P,Q,R 为 x,y,z 的连续函数,而 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴的单位向量.

空间的一条曲线,若其上每点的切向量 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\mathrm{d}y+\boldsymbol{k}\mathrm{d}z$ 与该点的场向量 $\boldsymbol{F}$ 共线,则称该曲线为此向量场的**特征曲线**.易见特征曲线可由微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=\frac{\mathrm{d}z}{R} \tag{7.27}$$

来确定.

由特征曲线组成的曲面,确切地说,如果特征曲线与曲面有一交点,则曲线就整条落在曲面上,这样的曲面称为**特征曲面**.因此,特征曲面上任一点处其法向量 $\boldsymbol{N}$ 与向量场的向量 $\boldsymbol{F}$ 正交,即

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}=0 \tag{7.28}$$

当特征曲面为显函数形式 $z=z(x,y)$ 时,$\boldsymbol{N}=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,从而关系式(7.28)为

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R. \tag{7.29}$$

当特征曲面为隐函数形式 $u(x,y,z)=0$ 时,$\boldsymbol{N}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$,这时(7.28)为

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{7.30}$$

即是说一阶线性(拟线性)偏微分方程的解(积分曲面)是特征

曲面，特征曲面由特征曲线组成，而寻求特征曲线的问题归结为求解常微分方程组.也就是说，一阶线性(拟线性)偏微分方程的求解问题可以归结为求解常微分方程组问题，这正与前面的分析结论相一致.

所谓柯西问题，用几何的语言说，就是求一阶偏微分方程(7.29)或(7.30)的通过某一给定曲线的积分曲面.这里必须指出，对于某些曲线(譬如特征曲线)柯西问题是不确定的，因为对一条特征曲线而言，可以有无穷多个特征曲面经过它；而对于另外一些曲线，柯西问题甚至没有解存在.但是我们有下面的一般结果.

定理 5 假设方程(7.2)中 $X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$于域 D 内是所有变元的连续可微函数，且 $X_n\neq 0$，则柯西问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0,\\ u\big|_{x_n=x_n^0}=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\end{cases} \tag{7.31}$$

存在唯一解，其中 x_n^0 是任意给定的数，$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$是它的变元的已知可微函数.

证明 设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$是特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{7.5}$$

的 $n-1$ 个彼此独立的首次积分，令

$$\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),\quad i=1,2,\cdots,n-1. \tag{7.32}$$

注意到$\dfrac{\partial(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}\neq 0$，我们可从(7.32)确定出

$$x_i=\omega_i(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}),\quad i=1,2,\cdots,n-1, \tag{7.33}$$

同时 ω_i $(i=1,2,\cdots,n-1)$关于它的变元具有连续的一阶偏导数.

可以断言，

$$u=f(\omega_1(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}),\cdots,\omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}))=\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n-1}) \tag{7.34}$$

就是柯西问题(7.31)的解.

事实上,若记 $X[u]=X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}$,则

$$X[\Phi]=\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}X[\psi_1]+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}X[\psi_2]+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_{n-1}}X[\psi_{n-1}],$$

而 $X[\psi_j]=0(j=1,2,\cdots,n-1)$,故 $X[\Phi]=0$,即 $u=\Phi$ 满足方程(7.2);又当 $x_n=x_n^0$ 时,注意到(7.32)和(7.33),有 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$,就是说(7.34)为问题(7.31)的解.

现在进一步证明,问题(7.31)的解是唯一的.设 $u=u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也是问题(7.31)的解,记(7.34)为 $u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则必有

$$u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

事实上,$u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i\ (i=1,2)$均为(7.5)的首次积分,于是对(7.5)的任一解 $x_i=x_i(x_n,x_1^0,\cdots,x_n^0)\ (i=1,2,\cdots,n-1)$有

$$\begin{aligned}u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=u_1(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0)\\&=u_2(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0)=u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

由解 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$的任意性可知,对于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$,只要 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$有定义,就有 $u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,证毕.

关于拟线性一阶偏微分方程的柯西问题类似地有

定理 6 假定方程(7.3)中 $Y_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;z)\ (i=1,2,\cdots,n)$和 $Z(x_1,x_2,\cdots,x_n;z)$于某域内是所有变元的连续可微函数,并且 $Y_n\neq0$,那么,柯西问题

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;z)\dfrac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n;z),\\ z|_{x_n=x_n^0}=g(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\end{cases}$$

存在唯一解，其中 x_n^0 为任意给定的数，g 为关于它的变元连续可微的已知函数.

例 1 求柯西问题

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ z\big|_{x=0}=y^2 \end{cases}$$

的解.

解 积分特征方程 $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}$ 得 $x^2+y^2=c$，从而方程的通解为

$$z=\varphi(x^2+y^2),$$

其中 φ 为其变元的任意可微函数.

计及所给条件得 $\varphi(y^2)=y^2$，因而 $\varphi(x^2+y^2)=x^2+y^2$，故所求解为 $z=x^2+y^2$.

顺便指出，这里也可视所给方程为拟线性方程，而求出特征方程

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}$$

的两个彼此独立的首次积分 $z=c_1$ 和 $x^2+y^2=c_2$，再由 $z=c_1$，$x^2+y^2=c_2$ 和 $x=0$，$z=y^2$ 消去 x,y,z 得 $c_1=c_2$，因此 $z=x^2+y^2$ 就是所求的解.

例 2 给定方程

$$(y-bz)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay \quad (b\neq -1),$$

求满足条件 $x=0$ 时 $z=y$ 的解.

解 由 §7.4 例 7 知道

$$ax+by+z=c_1, x^2+y^2+z^2=c_2$$

是其特征方程的两个彼此独立的首次积分，由它们和条件 $x=0$ 时，$z=y$ 一起得到 $2\left(\dfrac{c_1}{b+1}\right)^2=c_2$，因此所求的解为

$$x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{ax+by+z}{b+1}\right)^2.$$

例 3 求柯西问题

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=1, \\ x+y=1, \quad u=0 \end{cases}$$

的解.

解 特征方程为$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{1}$,容易求得它的两个彼此独立的首次积分

$$u+\frac{1}{x}=c_1, \quad 2y-u^2=c_2,$$

利用上式和初值条件 $x+y=1$ 时 $u=0$,消去 x,y,u 得到

$$c_1(2-c_2)=2,$$

于是

$$\left(u+\frac{1}{x}\right)(2-2y+u^2)=2$$

或

$$\frac{x}{1+ux}=\frac{u^2}{2}-y+1$$

就是所求的解.

例 4 求柯西问题

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2, \\ x+y=0, \quad z=0 \end{cases}$$

的解.

解 特征方程$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{x^2-y^2}$有两个彼此独立的首次积分 $x^2+y^2=c_1$ 和 $2z+(x+y)^2=c_2$,计及条件 $x+y=0$ 时 $z=0$,即得 $c_2=0$,因此所求的解为 $2z=-(x+y)^2$.

例 5 求方程

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

通过圆周 $z=1, x^2+y^2=4$ 的积分曲面.

解 求解方程组

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}$$

得到特征曲线族 $z=c_1, x^2+y^2=c_2$，易见所给圆周恰为特征曲线，因此问题是不确定的. 事实上，不难看出 $4z=x^2+y^2$；$z=x^2+y^2-3$；$x^2+y^2+z^2=5$ 等均为问题的解.

例 6 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

通过曲线 $x_0=s, y_0=s^2, z_0=s^3$ 的积分曲面，s 为参数.

解 引入新参数 t，并令 $dx=-dy=dz=dt$，则此方程组满足条件 $x(t_0)=s, y(t_0)=s^2, z(t_0)=s^3$ 的解，就是经过原给曲线的特征曲线，在此就是 $x=t+s, y=-t+s^2, z=t+s^3$（这里取 $t_0=0$），注意到积分曲面由特征曲线组成，因此上述特征曲线族的全体就是所求的积分曲面.

习 题 7

1. 求下列方程组的通积分及满足指定条件的解：

(1) $\frac{dx}{dt}=x+y, \frac{dy}{dt}=x+y+t$；

(2) $\frac{dx}{dt}=y+1, \frac{dy}{dt}=x+1$，当 $t=0$ 时，$x=-2, y=0$；

(3) $\frac{dx}{dt}=x-2y, \frac{dy}{dt}=x-y$，当 $t=0$ 时，$x=y=1$；

(4) $\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$.

2. 求下列方程的通解及满足给定条件的解：

(1) $yu_x-xu_y+(x^2-y^2)u_z=0$；

(2) $(z^2-2yz-y^2)u_x+(xy+xz)u_y+(xy-xz)u_z=0$;

(3) $x^2z_x-xyz_y+y^2=0$;

(4) $(y^3x-2x^4)z_x+(2y^4-x^3y)z_y=9z(x^3-y^3)$;

(5) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$($n$ 为自然数);

(6) $(u+y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(u+x+z)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$;

(7) $\frac{y-z}{yz}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{z-x}{zx}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-y}{xy}$;

(8) $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y, x=1, z=y$;

(9) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z, y=1, z=3x$;

(10) $yz\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0, x=0, z=y^3$.

3. 求与下列曲面族正交的曲面(a 为任意常数):

(1) $z=axy$;

(2) $xyz=a$;

(3) $z^2=axy$.

4. 试证方程(第二章(2.42)式)

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

有仅与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

仅是 x 的函数.

5. 证明以坐标原点为顶点的锥面方程可写为

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0 \quad 或 \quad z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

其中 Φ,φ 为其变元的可微函数.

本章学习要点

一阶线性偏微分方程的通解可由对应的常微分方程组的首次

积分构成.学习时首先要对概念与基本关系理解清楚,包括首次积分及其相互独立性,以及线性、拟线性、通解、对称形等概念,以及一阶线性偏微分方程的解等价于对应常微分方程组的首次积分.本章中还反复用到函数相关性及函数变量之间的转换.

其次要熟练掌握求常微分方程组的首次积分的方法,一是化为一阶微分方程求通解,然后求任意常数的显式表示得首次积分,更常用的是直接对对称形常微分方程组通过分子、分母的组合构成全微分而得.这里涉及的常微分方程组的初等积分法与第二章一阶微分方程的初等解法相互对应,其常微分方程组不限于线性.

此外,理解一阶齐次线性及非齐次拟线性偏微分方程的通解是由对应的对称形常微分方程组的 $n-1$ 及 n 个首次积分的任意函数构成,给出其初值条件的柯西问题即由初值条件确定其解函数.

最后,对一阶线性偏微分方程的解应通过几何直观给予充分理解,由于定理叙述的需要把几何解释放在最后.偏微分方程的解可看成积分曲面,而首次积分表示为特征曲线,由特征曲线构成积分曲面.因此,可以用常微分方程方法解一阶线性偏微分方程.

本章中的方法仅是解一阶线性偏微分方程的特征曲线方法,其实尚有幂级数展开、降维等方法,可参看其他偏微分方程教程.由于物理、力学中提出大量偏微分方程问题,归结为数学物理方程,有必要专门学习数学物理方程的理论和求解方法.因此,尚有数学物理方程和数学物理方法的教程,其中的数学物理方法往往包含属常微分方程范围的二阶线性微分方程所定义的特殊函数.

附录 I

边 值 问 题

本课程主要研究微分方程的求解及解的性质.讨论的定解问题是初值问题(柯西问题),以初始值条件作为求微分方程解的补充条件;还有一类定解问题是边值问题,其补充条件由以自变量取某些值时未知函数及其导数的值而定,称其为边值条件,许多数学和物理问题都归结为微分方程边值问题.本附录将研究有重要应用价值的二阶线性微分方程边值问题,包括边值问题的存在唯一性及其解法;并讨论了与之有关的格林函数、本征值和本征函数.

§1 边值问题的存在唯一性

对 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

如果能在不同的两点 a 和 b 处,唯一地刻画 n 个附加条件,并且在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上求解,则称此为**边值问题**.

二阶线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{1}$$

其中 $y=y(x)$ 为未知函数, $p(x),q(x),f(x)$ 均为已知连续函数.微分方程(1)的边界条件可以有多种,如

第一类边值条件: $y(a)=\alpha, y(b)=\beta$; (2)

第二类边值条件: $y'(a)=\alpha, y'(b)=\beta$;

第三类边值条件：$k_1y(a)+k_2y'(a)=\gamma_1,k_3y(b)+k_4y'(b)=\gamma_2$；

周期边值条件：$y(a)=y(b),y'(a)=y'(b)$ (3)

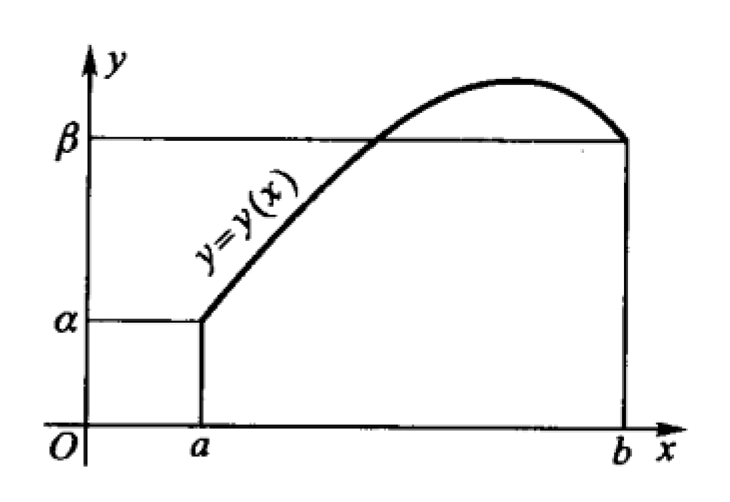
等.更一般地,可把各式合并写为

$$U_i[y]\equiv\alpha_{i0}y(a)+\beta_{i0}y(b)+\alpha_{i1}y'(a)+\beta_{i1}y'(b)=\gamma_i,\quad i=1,2,\tag{4}$$

其中 $\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_i(i=1,2,j=0,1)$是常数.

如果微分方程(1)和边值条件(4)都是齐次的,即 $f(x)=0$, $\gamma_i=0(i=1,2)$,则边值问题称为**齐次的**;在其他任何情况下,即只要 $f(x),\gamma_1,\gamma_2$中有一个不为零,则边值问题称为**非齐次的**.

解边值问题(1),(2)或者说求边值问题(1),(2)的解 $y=y(x)$,就是寻找微分方程(1)的解 $y=y(x)$使得它满足边值条件(2).从几何上看就相当于在 Oxy 平面上寻找一条曲线$y=y(x)$,使它通过(a,α)和(b,β)两点,并在区间(a,b)内满足微分方程(1)(见图(Ⅰ-1)).



图(Ⅰ-1)

和初值问题一样,边值问题同样有关于解的存在与唯一性的问题.先看如下两个简单的例子.

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & (5) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 1. & (6) \end{cases}$$

由于方程(5)的通解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \tag{7}$$

其中 c_1, c_2是任意常数.容易看到,不论 c_1, c_2取怎样的数值,都不能使此解同时满足(6)中的两个边值条件.事实上,如果将条件 $y(0)=0$代入通解(7),可得 $c_1 = 0$,而由条件 $y(\pi)=1$,得到 $c_1 = -1$.这两个结果互相矛盾,因此边值问题(5),(6)无解.

例 2 考虑边值问题

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & (5) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0. & (8) \end{cases}$$

容易看出,将边值条件(8)代入方程(5)的通解(7),只能定出 $c_1 = 0$,于是边值问题(5),(8)有无穷多个解

$$y = c_2 \sin x,$$

其中 c_2是任意常数.

我们注意,对于初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

来说,只要函数 $f(x, y, y')$及其偏导数 $f'_y(x, y, y')$和$f'_{y'}(x, y, y')$连续,解总是存在而且唯一的.但是对同样方程的边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = \alpha, \ y(b) = \beta \end{cases}$$

来说,正如在例 1、例 2 所看到的,即使函数 f 及其有关偏导数连续,还不能保证解的存在唯一,因此边值问题的存在唯一性要比初值问题的复杂.这里不作更多的讨论,我们只对二阶线性常微分方程的边值问题指出如下结论.

定理 1 如果已知非齐次微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

的一个解 $y_0(x)$，以及对应的齐次微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{9}$$

的基本解组 $y_1(x), y_2(x)$，则边值问题(1)，(4)可解的充分必要条件是：矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & U_1[y_0]-\gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & U_2[y_0]-\gamma_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

和矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] \end{bmatrix} \tag{11}$$

具有相同的秩；而边值问题(9)，(4)可解的充分必要条件是矩阵

$$\begin{bmatrix} U_1[y_1] & U_1[y_2] & \gamma_1 \\ U_2[y_1] & U_2[y_2] & \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

与矩阵(11)具有相同的秩. 而且边值问题有唯一非平凡解的充分必要条件是这些矩阵的秩均等于 2.

证明并不很难，请读者自行证明之.

最后我们约定，在下面的讨论中，总是假设所考虑的边值问题的解是存在且唯一的.

§ 2　待定常数法

求解二阶齐次线性微分方程边值问题常用的方法是待定常数法. 如果对边值问题中所考虑的微分方程的通解可以求出，则利用给定的边值条件确定其中的任意常数，便可求得所讨论的边值问题的特解，这种方法称为**待定常数法**.

例 3　求解边值问题

$$\begin{cases} y''=0, & (13) \\ y(0)=\alpha,\ y(1)=\beta, & (14) \end{cases}$$

其中 α,β 是给定的常数，由于方程(13)有通解 $y=c_1+c_2x$，以边

值条件(14)代入得到

$$c_1=\alpha,\ c_1+c_2=\beta, \tag{15}$$

即得 $c_1=\alpha, c_2=\beta-\alpha$,因此求出边值问题(13),(14)的解为

$$y=\alpha+(\beta-\alpha)x. \tag{16}$$

从上述例子看到,运用待定常数法关键在于求出所考虑的微分方程的通解.我们知道,对于二阶齐次线性微分方程,如果能找出它的两个线性无关的特解,那么它们的线性组合就是方程的通解.而这两个线性无关的特解又可以通过求解两个特殊的初值问题而得到,因此为了求解边值问题可以先通过求解初值问题求出通解,然后再通过待定常数法进行求解.

先考虑二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\quad(a\leqslant x\leqslant b) \tag{9}$$

满足边值条件

$$y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta \tag{2}$$

的边值问题.首先设法求出方程(9)的两个特解 $y_1(x), y_2(x)$,使得 $y_1(x)$满足初值条件

$$y_1(a)=1,\ y_1'(a)=0, \tag{17}$$

而 $y_2(x)$满足初值条件

$$y_2(a)=0,\ y_2'(a)=1, \tag{18}$$

显然,这两个解 $y_1(x), y_2(x)$是线性无关的,则根据定理1,当 $\alpha\neq0$或 $\beta\neq0$ 时,边值问题(9),(2)有唯一非平凡解的充分必要条件是 $y_2(b)\neq0$.

事实上,我们可构造出方程(9)的通解有形式

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x), \tag{19}$$

令它满足边值条件(2)得到

$$c_1y_1(a)+c_2y_2(a)=\alpha,$$
$$c_1y_1(b)+c_2y_2(b)=\beta.$$

再利用(17)和(18)式,当 $y_2(b)\neq0$ 时可解出

$$c_1=\alpha, c_2=\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)},$$

于是得到边值问题(9)、(2)的解为

$$y(x)=\alpha y_1(x)+\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)}y_2(x). \tag{20}$$

现在考虑二阶非齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{1}$$

满足边值条件(2)的边值问题.利用前面类似的方法,只要设法求得非齐次线性微分方程(1)的一个特解 $y_0(x)$,使它满足初值条件

$$y_0(a)=\alpha,\ y_0'(a)=0,$$

并求出相应的齐次微分方程(9)的一个特解 $y_1(x)$,使其满足初值条件

$$y_1(a)=0,\ y_1'(a)=1,$$

则当 $y_1(b)\neq 0$ 时,我们可求得边值问题(1),(2)的解为

$$y(x)=y_0(x)+\frac{\beta-y_0(b)}{y_1(b)}y_1(x). \tag{21}$$

例 4 求解边值问题

$$\begin{cases} y''+\dfrac{4x}{1+x^2}y'+\dfrac{2}{1+x^2}y=0, & (22)\\ y(0)=1,\ y(2)=1. & (23)\end{cases}$$

容易验证方程(22)有两个线性无关解

$$y_1(x)=\frac{1}{1+x^2},\ y_2(x)=\frac{x}{1+x^2},$$

分别满足初值条件

$$y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0,$$
$$y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1,$$

注意 $y_2(2)=\frac{2}{5}\neq 0$,利用公式(20)立即得到边值问题(22),(23)的解为

$$y=\frac{1+2x}{1+x^2}.$$

例 5 求解边值问题

$$\begin{cases} y''+3y=\cos x, & (24)\\ y(0)=\frac{1}{2}, y(\pi)=-\frac{1}{2}. & (25)\end{cases}$$

显然 $y_0(x)=\frac{1}{2}\cos x$ 是方程(24)满足初值条件

$$y_0(0)=\frac{1}{2},\ y_0'(0)=0$$

的一个特解，另外容易知道相应的齐次微分方程

$$y''+3y=0$$

有一个解 $y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x$，满足初值条件

$$y_1(0)=0,\ y'_1(0)=1,$$

而且 $y_1(\pi)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\pi\neq 0$，因此根据公式(21)立即得到边值问题(24)，(25)的解为

$$y=\frac{1}{2}\cos x.$$

§3 格 林 函 数

对于二阶非齐次线性微分方程边值问题常用的是利用格林函数求解. 我们已经知道(参阅第五章 5.2.2)，利用常数变易法，可求得非齐次线性微分方程(1)有如下形式的通解：

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\int_a^x\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t, \quad (26)$$

其中 $y_1(x), y_2(x)$ 是对应的齐次微分方程(9)的分别满足初值条

件(17)和(18)的基本解组,而 $W(x)$是 $y_1(x)$,$y_2(x)$的朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

先考虑齐次边值条件

$$y(a)=0,\ y(b)=0, \tag{27}$$

我们希望(26)满足边值条件(27),由条件 $y(a)=0$ 得知 $c_1=0$,再由条件 $y(b)=0$ 给出

$$c_2y_2(b)+\int_a^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t=0, \tag{28}$$

从定理 1 可知,为使边值问题(1),(27)存在唯一的非平凡解,必须且仅须 $y_2(b)\neq 0$,此时由(28)解出

$$c_2=-\frac{1}{y_2(b)}\int_a^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t,$$

从而代入(26)并经过一些演算便可得到

$$\begin{aligned}
y(x)&=-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_a^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_a^x\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t\\
&=-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_x^b\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t\\
&\quad-\frac{y_2(x)}{y_2(b)}\int_a^x\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_a^x\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\mathrm{d}t\\
&=\int_x^b\frac{y_2(x)f(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(t)y_1(b)-y_1(t)y_2(b)]\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_a^x\frac{y_2(t)f(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(x)y_1(b)-y_1(x)y_2(b)]\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

为方便起见,定义函数

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{y_2(t)}{y_2(b)W(t)}[y_2(x)y_1(b)-y_1(x)y_2(b)], & a\leqslant t\leqslant x,\\ \dfrac{y_2(x)}{y_2(b)W(t)}[y_2(t)y_1(b)-y_1(t)y_2(b)], & x\leqslant t\leqslant b,\end{cases}$$

则边值问题(1),(27)的解即可写为如下简便形式：

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{29}$$

于是得到如下重要的结果：

定理 2 如果齐次微分方程(9)存在基本解组 $y_1(x), y_2(x)$，且 $y_2(b)\neq 0$，则对每一个在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续的函数 $f(x)$，非齐次边值问题(1),(27)都存在唯一解，并且这个解 $y(x)$ 可由公式(29)唯一确定.

公式(29)中的 $G(x,t)$ 称为边值问题(1),(27)的**格林函数**，它具有如下性质：

(1) $G(x,t)$ 在正方形 $a\leqslant t, x\leqslant b$ 上连续；

(2) $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ 在 $a\leqslant t, x\leqslant b$ 上连续($x\neq t$)；

(3) $G(x,t)$ 对每一个固定的 t，作为 x 的函数($x\neq t$)满足齐次微分方程(9)；而对每个固定的 x，作为 t 的函数满足边值条件(27).

上述性质可由 $G(x,t)$ 的表达式直接验证，这里从略.

例 6 考虑边值问题

$$\begin{cases} y''=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b), & (30)\\ y(a)=0,\ y(b)=0, & (27)\end{cases}$$

其中 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，显然 $y_1(x)=1, y_2(x)=x-a$ 是齐次微分方程 $y''=0$ 满足初值条件(17),(18)的基本解组，因此立即可求得边值问题(30),(27)的格林函数为

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(b-x)(a-t)}{b-a}, & a\leqslant t\leqslant x,\\[2mm] \dfrac{(a-x)(b-t)}{b-a}, & x\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

最后,应该指出,格林函数是解决非齐次边值问题的有效工具,而且对各种不同类型的方程和边值条件可以推导出各种形式的格林函数,在此不多介绍了.

§4 本征值和本征函数

在边值问题中有一类属于求本征值和本征函数(也称特征值和特征函数)的问题,简称为本征值问题,这类问题在生产实践中具有重要的意义.事实上,与振动有关的一类物理、力学问题,往往可归结为本征值问题,有些偏微分方程的本征值问题,通过分离变量法,也可以化为常微分方程的本征值问题.在这里我们通过几个例子简单介绍一下边值问题的本征值和本征函数的概念以及一些结果.

例 7 考虑边值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0, & (31)\\ y(0)=0,\ y(\pi)=0, & (32)\end{cases}$$

其中 λ 是参数.

显然边值问题(31),(32)有零解 $y(x)=0$.但除零解之外,是否还有非零解呢? 也就是说,参数 λ 取什么值时,方程(31)在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上才有不恒为零的解 $y(x)$,并满足边值条件(32)呢? 下面分三种情形来讨论:

(1) $\lambda=0$,此时微分方程(31)变为 $y''=0$,其通解为

$$y=c_1x+c_2,$$

把边值条件(32)代入,得到 $c_1=c_2=0$,因此,$y(x)=0$.这说明当 $\lambda=0$ 时边值问题(31),(32)没有非零解.

(2) $\lambda<0$,令 $\lambda=-\mu^2$,这样微分方程(31)变为

$$y''-\mu^2y=0,$$

它的通解可写为

$$y=c_1\text{sh }\mu x+c_2\text{ch }\mu x.$$

由条件 $y(0)=0$,得到 $c_2=0$,于是 $y=c_1\text{sh }\mu x$,又由条件 $y(\pi)=0$,得 $c_1\text{sh }\mu\pi=0$,但当 $\mu\neq0$ 时 $\text{sh }\mu\pi\neq0$,因而必须 $c_1=0$,故 $\lambda<0$ 时边值问题(31),(32)也没有非零解.

(3) $\lambda>0$,此时微分方程(31)的通解为

$$y=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由条件 $y(0)=0$,知 $c_1=0$,即得 $y=c_2\sin\sqrt{\lambda}x$,又由条件 $y(\pi)=0$,得 $c_2\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$,若 $c_2=0$,则 $y(x)=0$. 所以,要有非零解存在,就必须 $\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$,于是

$$\lambda=n^2\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots).\tag{33}$$

与这些 λ 值对应的边值问题(31),(32)的解为

$$y=c_2\sin nx\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots).\tag{34}$$

综合以上讨论得知:当且仅当 $\lambda=n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$时,边值问题(31),(32)才有非零解. 使边值问题(31),(32)有非零解的这些 λ 值(33)称为边值问题(31),(32)的**本征值**,与本征值(33)对应的解(34)称为**本征函数**.

例 8 考虑非齐次边值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=f(x), & (35)\\ y(0)=0,y(\pi)=0, & (32)\end{cases}$$

其中 $f(x)$是在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上的连续函数. 和初值问题相类似,非齐次边值问题(35),(32)与其对应的齐次边值问题(31),(32)有紧密的联系,不过 λ 是否为本征值将会有很大的差别,下面我们假设 $\lambda>0$.

由常数变易法(参阅第四章 4.1.3)求得非齐次线性微分方程(35)的通解为

$$y(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)\mathrm{d}t. \qquad (36)$$

我们希望解(36)能满足边值条件(32),由条件 $y(0)=0$,得 $c_1=0$,再由条件 $y(\pi)=0$,给出

$$c_2\sin\sqrt{\lambda}\pi+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)\mathrm{d}t=0. \qquad (37)$$

对于给定的 λ,如果 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq0$,则由(37)可唯一地确定出常数 c_2

$$c_2=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)\mathrm{d}t,$$

从而由(36)得到

$$y(x)=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)\mathrm{d}t. \qquad (38)$$

我们注意:条件 $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq0$ 就相当于 λ 不是齐次边值问题(31),(32)的本征值(参看例 7).

下面分两种情形来讨论:

(1) 如果 $\lambda=\lambda^*$ 是齐次边值问题(31),(32)的本征值,即 $\sin\sqrt{\lambda^*}\pi=0$,因而 $\lambda^*=n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$,则对任意选择的 c_2,(37)成立的充分必要条件是

$$\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}(\pi-t)\mathrm{d}t=0,$$

或等价地

$$\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}t\mathrm{d}t=0. \qquad (39)$$

此时解(36)就变为

$$y(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda^*}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\int_0^x f(t)\sin\sqrt{\lambda^*}(x-t)\mathrm{d}t,$$

其中 c_2 是任意常数，且不能由边值条件来确定．因此，如果 $\lambda=\lambda^*$ 是齐次边值问题(31)，(32)的本征值，则非齐次边值问题(35)，(32)就不能有唯一的解．若条件(39)满足，它有无穷多个解；若条件(39)不满足，它便没有解．

(2) 如果 λ 不是齐次边值问题(31)，(32)的本征值，则由(38)给出的非齐次边值问题(35)，(32)的解 $y(x)$ 是唯一的．事实上，假定 $z(x)$ 是非齐次线性微分方程(35)满足边值条件(32)的另一个解，则 $y(x)-z(x)$ 是齐次微分方程(31)的解，且满足边值条件(32)，因而，如果 $y(x)-z(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上不恒等于零，λ 就是齐次边值问题(31)，(32)的本征值，这与假设相矛盾．

此时，$\lambda\neq n^2\,(n=\pm1,\pm2,\cdots)$(参阅例 7)，现在我们把唯一解(38)改写为

$$
\begin{aligned}
y(x)=&\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}f(t)\mathrm{d}t\\
&-\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}f(t)\mathrm{d}t\\
&-\int_x^\pi\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}f(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}\\
=&-\frac{\sin\sqrt{\lambda}t\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi},
\end{aligned}
$$

上式可以统一写为

$$
y(x)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\qquad(40)
$$

其中

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x\cdot\sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}, & x\leqslant t\leqslant\pi\end{cases}\tag{40$_1$}$$

就是非齐次边值问题(35),(32)的格林函数,它是对于 $0\leqslant t,x\leqslant\pi$ 和 $\lambda\neq n^2(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 定义的连续函数;而且 $\dfrac{\partial G(x,t,\lambda)}{\partial x}$ 对 $x\neq t$ 是连续的;$G(x,t,\lambda)$ 对每一个固定的 t,作为 x 的函数 $(x\neq t)$,满足齐次微分方程(31),而对每个固定的 x,作为 t 的函数满足边值条件(32)(参阅定理 2).

例 9 求解边值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0, & (31)\\ y(0)=\alpha,\ y(\pi)=\beta, & (41)\end{cases}$$

这里边值条件(41)是非齐次的,其中 α,β 是给定的常数.我们可以把这问题化为在例 8 中讨论过的那类边值问题,其中微分方程为非齐次的,而边界条件是齐次的.

假设 $h(x)$ 是在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上有二阶连续导数的函数,使得

$$h(0)=\alpha,\ h(\pi)=\beta,$$

例如 $h(x)=\alpha+\dfrac{(\beta-\alpha)x}{\pi}$ 就是这样的函数,令

$$y(x)=z(x)+h(x),$$

则 $y'(x)=z'(x)+h'(x),y''(x)=z''(x)+h''(x)$,并且

$$y''(x)+\lambda y(x)=z''(x)+h''(x)+\lambda[z(x)+h(x)],$$

因此边值问题(31),(41)就化为如下边值问题:

$$\begin{cases}z''+\lambda z=-[h''(x)+\lambda h(x)], & (42)\\ z(0)=0,\ z(\pi)=0. & (43)\end{cases}$$

那么根据例 8 中的讨论,利用公式(40)即得边值问题(42),(43)的解为

$$z(x)=\int_0^{\pi}G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,0\leqslant x\leqslant\pi.$$

而原边值问题(31),(41)的解即为

$$y(x)=\int_0^{\pi} G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+h(x), 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

其中 $G(x,t,\lambda)$由$(40)_1$给出,又 $f(x)=-[h''(x)+\lambda h(x)]$,如果选择 $h(x)=\alpha+\frac{(\beta-\alpha)x}{\pi}$,则有

$$f(x)=-\lambda\left[\alpha+(\beta-\alpha)\frac{x}{\pi}\right].$$

例 10 求解边值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=f(x), & (35)\\ y(0)=\alpha, y(\pi)=\beta. & (41)\end{cases}$$

我们可以把这问题化为在例 8 及例 9 中所讨论过的两个较简单的问题. 假设 $y_1(x)$是具有齐次微分方程的边值问题(31),(41)的解(例 9),$y_2(x)$是具有齐次边值条件的边值问题(35),(32)的解(例 8),如果 λ 不是齐次边值问题(31),(32)的本征值,则所给边值问题(35),(41)的解为

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

而且这个解 $y(x)$是唯一的. 这个结论的证明留给读者作为练习.

为了研究更一般形式的微分方程的本征值问题,我们引进"自伴本征值问题"的概念.

考虑二阶齐次线性微分方程

$$L[y]\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\lambda y, \tag{44}$$

其中 $p_0(x),p_1(x),p_2(x)$是在区间$[a,b]$上给定的实的连续函数,且 $p_0(x)\neq 0$,λ 是参数. 如果方程(44)中的算符 L 具有这样的性质:对于任意两个在区间$[a,b]$上有连续二阶导数并满足一定边值条件的 $u(x)$和 $v(x)$,关系式

$$\int_a^b \bar{u}L[v]\mathrm{d}x=\int_a^b v\overline{L[u]}\mathrm{d}x \tag{45}$$

(其中上面一横表示复数共轭)成立,则相应的本征值问题称为自

伴的.对于自伴本征值问题有如下基本定理：

定理 3 自伴问题的本征值必是实数，并且对应于不同本征值的本征函数在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是两两正交的.

证明 设 λ^* 为自伴问题的本征值，$\varphi(x)$为相应的本征函数，即 φ 满足方程$L[\varphi]=\lambda^*\varphi$，令$\overline{\lambda^*}$和$\overline{\varphi(x)}$分别表示 λ^* 和 $\varphi(x)$ 的共轭复数，则$\overline{L[\varphi]}=\overline{\lambda^*}\,\overline{\varphi}$，于是由自伴关系(45)及 $\varphi\overline{\varphi}=|\varphi|^2$ 得

$$\int_a^b \overline{\varphi}L[\varphi]\mathrm{d}x-\int_a^b \varphi\overline{L[\varphi]}\mathrm{d}x$$
$$=(\lambda^*-\overline{\lambda^*})\int_a^b |\varphi|^2\mathrm{d}x=0,$$

由本征函数的定义，$|\varphi(x)|^2>0$，因而 $\int_a^b |\varphi|^2\mathrm{d}x>0$，故 $\lambda^*=\overline{\lambda^*}$，即 λ^* 为实数.

设 $\varphi_m(x)$和 $\varphi_n(x)$是分别对应于两个不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数，由自伴关系式(45)，并注意本征值是实数，得到

$$\int_a^b \overline{\varphi}_m L[\varphi_n]\mathrm{d}x-\int_a^b \varphi_n\overline{L[\varphi_m]}\mathrm{d}x$$
$$=(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b \overline{\varphi}_m\cdot\varphi_n\mathrm{d}x=0,$$

既然 $\lambda_m\neq\lambda_n$，则必有

$$\int_a^b \overline{\varphi_m(x)}\cdot\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

故 $\varphi_m(x)$和 $\varphi_n(x)$是正交的.

定理 3 证毕.

例 11 微分方程

$$L[y]\equiv -y''=\lambda y \tag{31}$$

和边值条件

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0,\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \tag{46}$$

($\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$是实常数，且 α_1 和 α_2不同时为零，β_1 和 β_2不同时为

零)或周期边界条件

$$y(a)-y(b)=0,\ y'(a)-y'(b)=0 \tag{3}$$

组成自伴本征值问题.

事实上,假设 $u(x)$和 $v(x)$是任意两个在区间$[a,b]$上有连续二阶导数并满足边值条件(46)的函数,则对方程(31)中的算符 L 利用分部积分法得到

$$\begin{aligned}\int_a^b \bar{u}L[v]\mathrm{d}x &= -\int_a^b \bar{u}v''\mathrm{d}x \\ &= -(\bar{u}v')\Big|_a^b+\int_a^b \bar{u}'v'\mathrm{d}x \\ &= (\bar{u}'v-\bar{u}v')\Big|_a^b-\int_a^b v\bar{u}''\mathrm{d}x \\ &= (\bar{u}'v-\bar{u}v')\Big|_a^b+\int_a^b v\,\overline{L[u]}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因 $u(x)$和 $v(x)$都满足边值条件(46),故由其中的第一个条件得

$$\alpha_1\bar{u}(a)+\alpha_2\bar{u}'(a)=0,$$

$$\alpha_1 v(a)+\alpha_2 v'(a)=0,$$

按所设 α_1和 α_2不同时为零,例如 $\alpha_1\neq0$,则有

$$\bar{u}(a)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{u}'(a),v(a)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}v'(a),$$

即有

$$\begin{aligned}&\bar{u}'(a)v(a)-\bar{u}(a)v'(a)\\ =&-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}[\bar{u}'(a)v'(a)-\bar{u}'(a)v'(a)]\\ =&0,\end{aligned}$$

故得到

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')|_{x=a}=0, \tag{47}$$

同样由(46)的第二个条件得到

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')|_{x=b}=0. \tag{48}$$

因此成立

$$\int_a^b \bar{u}L[v]\mathrm{d}x = \int_a^b v\overline{L[u]}\mathrm{d}x,$$

这证明本征值问题(31),(46)是自伴的. 显然问题(31),(32)是此问题的特殊情形.

对于周期边值条件(3),容易验证亦有

$$(\bar{u}'v - \bar{u}v')\Big|_a^b = 0, \tag{49}$$

故本征值问题(31),(3)亦是自伴的,于是所考虑的本征值问题有定理 3 所述的结果.

例 12 施图姆 - 刘维尔(Sturm - Liouville)型方程

$$L(y) \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y = \lambda y \tag{50}$$

和边值条件(46)或(3)的本征值问题也是自伴的,其中 $p(x)$, $q(x)$是在区间$[a,b]$上不等于零的实连续函数,而对周期边值条件(3)的情形还要求 $p(a) = p(b)$.

类似例 11 中的讨论,假设 $u(x)$和 $v(x)$是任意两个在区间$[a,b]$上有连续二阶导数且满足边值条件(46)或(3)的函数,则对方程(50)中的算符 L 有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \bar{u}L[v]\mathrm{d}x - \int_a^b v\overline{L[u]}\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \bar{u}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pv') + qv\right]\mathrm{d}x - \int_a^b v\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\bar{u}') + q\bar{u}\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left[v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\bar{u}') - \bar{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pv')\right]\mathrm{d}x \\
&= [p(x)(\bar{u}'v - \bar{u}v')]\Big|_a^b,
\end{aligned}$$

利用(47),(48)或(49)立即推知所考虑的本征值问题是自伴的. 特别是勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \tag{51}$$

和边值条件(46)或(3)所组成的本征值问题是自伴的.

最后,我们指出,对更一般形式的边值条件(4),亦可进行类似的讨论,甚至还可以探讨各种不同类型的本征值问题,例如§6.6.3讨论的 Schrodinger 方程.由于篇幅所限,我们就不在此作详细讨论了.

附录Ⅱ

数学软件在常微分方程中的应用

§1 引　言

现在,已有多种数学软件供我们使用,使我们可以应用计算机软件辅助进行数学包括常微分方程的学习、研究,而不只靠纸笔演算了.应用计算机辅助常微分方程的学习、研究分两个方面,一方面可以通过计算机数值计算和绘图迅速了解或探讨某些常微分方程的性态;另一方面是应用数学软件中的符号计算功能直接求解某些常微分方程.考虑到本书是介绍常微分方程的基本理论和方法,不宜用计算机直接求解代替必要的练习,因此这附录主要介绍常微分方程数值解函数和向量场、等高线图及积分曲线、轨线的绘制及几种典型的常微分方程模型,如范德波尔方程、Lorenz 方程的相图程序,同时还介绍了求解线性微分方程时需要用到的求矩阵特征值、拉普拉斯变换和反变换的有关函数.希望结合数学软件进行常微分方程的学习,可解除繁琐、重复的人工计算,起到事半功倍的作用.

考虑到应用的普遍性以及应有较丰富的绘图函数,我们选择 Mathematica, MATLAB 和 Maple 三种各有特色的计算机数学软件分别介绍,以适合不同人的需要.Mathematica 语言多用于物理学界,其符号运算、数值计算及图形绘制均有特色,特别是输入显

示界面可以直接输入显示习惯的数学符号,非常直观,在其“帮助”菜单中列出的例题还可以直接运行或修改运行;但有些规定如函数参数均需用方括号与众不同.MATLAB 语言主要用于工程及科学计算领域,其矩阵形式变量使数值输入计算均非常精炼,图形显示也很灵活,并有众多程序包供使用;但其函数定义必须用 M 文件,其符号运算是借助 Maple 语言,不甚方便.Maple 语言在数学界较通用,擅长符号运算,微分方程的积分曲线或轨线图形直接用函数定义,省去了先求数值解再显示,且可同时绘多条轨线,非常方便.作为计算机辅助学习工具实际只要熟悉一种数学语言即可.

使用时注意各语言的特殊规定,如在 Mathematica 语言中运算、执行用“Shift” + “Enter”,而“Enter”仅为换行,而在 Maple 语言中运算、执行用“Enter”,而“Shift” + “Enter”仅为换行,刚好相反.

对常微分方程的学习、研究来说,计算机辅助可分四个部分:首先,用于线性微分方程求解的指数函数与矩阵特征值、特征向量的计算及用于求平衡点的代数方程与方程组的求解;其次是方向场与等高线图形显示和微分方程数值解及其相应的图形显示,其中方向场与等高线图形显示用于分析微分方程解的走向与哈密顿函数或 V 函数的轨线或等势(位)线,而微分方程数值解主要用于积分曲线图或轨线图的图形显示,特别是对特殊方程如范德波尔方程、Lorenz 方程、虫口模型、孤立子等的有关图形,是了解微分方程解的性态的重要手段;然后是常微分方程的特殊解法,这里我们仅提出拉普拉斯变换,其余如幂级数解和特殊函数的求解等因较专门或超出本书范围而从略;最后是常微分方程的直接求解,即通过计算机符号计算程序求出解的解析表达式.后面我们针对这四个部分分别列出三种语言的相应函数.应该指出的是虽然列出了常微分方程符号求解函数,但仅可做研究时应用或学习时做检验用,毕竟计算机是不能也不应代替我们学习的.

后面除介绍有关语言的应用函数外同时给出常微分方程应用的典型例子的语言程序,由于列举的都是书中的实例,为省篇幅我

们略去了运行的图形结果.需要说明的是,例中仅提供基本且简单的程序,读者可以在学习时加以变通、补充.有些语言的教材或“帮助”菜单中曾给出更为精巧的程序,因需学习其编程技巧而没有采用.至于例中程序可能涉及其他函数,对有关函数及其详细格式可查阅各软件的手册或“帮助”菜单,书中无法一一介绍.

§2 Mathematica 语言

2.1 矩阵、行列式与代数方程组解

指数函数:Exp[A] 求矩阵 **A** 的指数函数.

特征值:

Eigenvalues[A] 求矩阵 **A** 的特征值;

Eigenvectors [A] 求矩阵 **A** 的特征向量;

Eigensystem[A] 求矩阵 **A** 的特征值、特征向量.

行列式: Det[A] 计算矩阵 **A** 的行列式的值.

代数方程组解:

Solve[{eqns},{vars}] 求方程组 *eqns* 中的变量 *vars* 的解.

例 1 §5.3.1 例 2,3,4,7.

```
A={{2,1},{0.2}};
Eigensystem[A]
Exp[A*t]

A={{3,5},{-5,3}};
Eigensystem[A]
Exp[A*t]

A={{2,1},{-1,4}};
Eigensystem[A]
Exp[A*t]
```

例 2 §6.1 例 2.

```
MatrixForm[m2 = {{-2,1,-1},{1,-1,0},{1,1,-1}}]
Eigenvalues[m2]//N
Eigensystem[m2]//N
Det[m2]
```

例 3 习题 6.1 的 3(1).

```
sol = Solve[{1 - x - y == 0, 2 - 3 * x - y == 0}, {x, y}]
```

2.2 向量场、等高线、微分方程数值解及其图形

对一阶常微分方程 $y' = f(x, y)$,

向量场: 平面 `<<Graphics`PlotField``

`PlotVectorField[{1,f(x,y)},{x,x1,x2},{y,y1,y2}]` 在指定范围 $x1 \leqslant x \leqslant x2, y1 \leqslant y \leqslant y2$ 内绘制一阶常微分方程的向量场.

三维 `<<Graphics`PlotField3D``

`PlotVectorField3D[{fx,fy,fz},{x,x1,x2},{y,y1,y2},{z,z1,z2}]`

等高线图: `ContourPlot[f,{x,x1,x2},{y,y1,y2}]`

常微分方程数值解:

`NDSolve[{eqn1,eqn2,…},y[x],{x,a,b}];`

`NDSolve[{eqn1,eqn2,…,ini_conds},{y1[x],y2[x],…},{x,a,b}];`

积分曲线图:

`Plot[Evaluate[y[x]/.sol],{x,a,b},PlotRange->All];`

平面曲线图:

`Plot[f,{x,xmin,xmax},option->value]` 指定特定的图形选项绘制函数 $f(x)$ 的图形

空间曲线图:

`Plot3D[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]` x 从 $x$min 到 $x$max, y 从 ymin 到 ymax 绘制函数 $f(x, y)$ 函数图

平面点列图: `ListPlot[{{x1,y1},{x2,y2},…}]`

平面参数图：ParametricPlot[{x(t),y(t)},{t,tmin,tmax}]

空间参数图：

ParametricPlot[{x(t),y(t),z(t)},{t,tmin,tmax}]

例 4 微分方程 $y'=1-y^2, y(-3)=0.99$ 的方向场和积分曲线图.

```
g1 = PlotVectorField[{1,1 - y^2},{x, - 4,4},{y, - 3,3},Frame - >
True,ScaleFunction - >(1  &),ScaleFactor - >0.16,HeadLength - >0.01,
PlotPoints - >{30,40}];
sol = NDSolve[{y'[x] - 1 + y[x]^2 == 0,y[ - 3] == - 0.99},y[x],{x,
- 3,3}];
g2 = Plot[Evaluate[y[x]/. sol],{x, - 3,3},PlotRange - >All];
Show[g1,g2]
```

例 5 哈密顿函数 $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$ 的轨线图（等势面）.

```
ContourPlot[y^2/2 - x^2/2 + x^4/4,{x, - 1.5,1.5},{y, - 1.5,1.5},Plot-
Points - >120,ContourShading - >False,Contours - >30];
```

例 6 V 函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(8x^2+4xy+y^2)$ 的等高图及微分方程 $x'=y, y'=-2x-3y$ 的轨线图.

```
Remove["Global`*"]
g0 = ContourPlot[(8x^2 + 4xy + y^2)/2,{x, - 12,12},{y, - 12,12},Plot-
Points - >120,ContourShading - >False,Contours - >30];
sys = {x'[t] == y[t],y'[t] == - 2x[t] - 3y[t]};
so1 = NDSolve[{sys, x[0] == - 10, y[0] == 10},{x[t],y[t]},{t,0,
10}];
g1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. so1],{t,0,10},PlotRange
- >All];
so2 = NDSolve[{sys,x[0] == - 10,y[0] == - 10},{x[t],y[t]},{t,0,
10}];
g2 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. so2],{t,0,10},PlotRange
```

```
->All];
    so3 = NDSolve[{sys,x[0] == 10,y[0] == 11},{x[t],y[t]},{t,0,10}];
    g3 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.so3],{t,0,10},PlotRange
->All];
    so4 = NDSolve[{sys,x[0] == 8,y[0] == -12},{x[t],y[t]},{t,0,10}];
    g4 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.so4],{t,0,10},PlotRange
->All];
    Show[g0,g1,g2,g3,g4]
```

例 7 范德波尔方程轨线图.

```
sysVdP: = {x'[t] == y[t] - 0.2 * (x[t]^3/3 - x[t]),y'[t] == x[t]};
soVdP1 = NDSolve[{sysVdP,x[0] == -3,y[0] == 0.1},{x[t],y[t]},
{t,0,20}];
gVdP1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.soVdP1],{t,0,20},Plot
Range->All,AspectRatio->Automatic];
soVdP2 = NDSolve[{sysVdP,x[0] == 0,y[0] == 0.1},{x[t],y[t]},{t,
0,20}];
gVdP2 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.soVdP2],{t,0,20},Plot
Range->All,AspectRatio->Automatic];
Show[gVdp1,gVdP2]
```

例 8 Lorenz 方程轨线图.

```
<<Graphics`Graphics3D`
eq = Sequence[x'[t] == 16 * y[t] - 16 * x[t],y'[t] == -x[t] * z[t] + 45
* x[t] - y[t],z'[t] == x[t] * y[t] - 4 * z[t]];
sol = NDSolve[{eq,x[0] == 12,y[0] == 4,z[0] == 0},{x[t],y[t],z[t]},
{t,0,16},MaxSteps->10000];
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.sol],{t,0,16},PlotPoints
->14400,Boxed->False]
```

例 9 虫口模型轨线图.

```
<<Graphics`Graphics`
am = 2;an = 4;ak = 0.01;im = 150;xm = .01;
n = Ceiling[(an - am)/ak];m = Ceiling[1/xm];
```

```
For[k=1,k<=n,k=k+1,a=k*ak+am;
    For[ i=1,i<=m, i=i+1,x=i*xm;
      For[ j=1,j<=im,j=j+1,y=a*x*(1-x);x=y;];
      u[k,i]=y;
      ];
    ];
ListPlot[Flatten[Table[{k*ak+am,u[k,i]},{k,1,n},{i,1,m}]],PlotRange->{0,1}]
```

例 10 孤立子图.

```
Remove["Global`*"]
a=4;c0=0;
Plot3D[Sech[Sqrt[a]*(x-a*t-c0)/2]^2/2,{t,-10,10},{x,-10,10},PlotRange->All]
Plot3D[12*(3+4*Cosh[8*t-2*x]+Cosh[64*t-4*x])/(Cosh[36*t-3*x]+3*Cosh[28*t-x])^2,{t,-10,10},{x,-10,10},PlotRange->All]
```

2.3 拉普拉斯变换

DiracDelta[t]　Dirac Delta 函数,奇点位于 $t=0$.

UnitStep[t]　Unit Step 函数,$t<0$ 时值为 0,$t\geqslant 0$ 时值为 1.

LaplaceTransform[f(t),t,s]　$f(t)$从 t 至 s 的拉普拉斯变换.

InverseLaplaceTransform[F(s),s,t]　反拉普拉斯变换.

例 11 §5.3.2 例 10、例 11.

```
Remove["Global`*"]
eqL1=LaplaceTransform[{x'[t]==3*x[t]+5*y[t]+Exp[-t],y'[t]==-5*x[t]+3*y[t]},t,s];
eqL2=eqL1/.{x[0]==0,y[0]==1,LaplaceTransform->[x[t],t,s]->X[s],LaplaceTransform[y[t],t,s]->Y[s]};
soL=Solve[eqL2,{X[s],Y[s]}];
x=InverseLaplaceTransform[soL[[1,1,2]],s,t]
y=InverseLaplaceTransform[soL[[1,2,2]],s,t]
```

2.4 解常微分方程

DSolve[eqn,y[x],x] 解常微分方程 *eqn*，其中 y 为 x 的函数；

DSolve[{eqn,conds},y[x],x] 解含初值或边值条件的微分方程 *eqn*；

DSolve[{eqn1,eqn2,…},y[x],x] 解常微分方程组 *eqn*1，*eqn*2，…；

DSolve[{eqn1,eqn2,…,ini _ conds},{y1[x],y2[x],…},x]

例 12 解微分方程 $y'=1-y^2, y(0)=0$.

```
DSolve[{y'[x]==1-y[x]^2,y[0]==0},y[x],x]
```

例 13 §5.2.2 例 2.

```
DSolve[{x1'[t]==x1[t]+x2[t]+Exp[-t],x2'[t]==x2[t],x1[0]=
=-1,x2[0]==1},{x1[t],x2[t]},t]
```

§3 MATLAB 语言

3.1 矩阵、行列式与代数方程组解

指数函数：

expm(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的指数函数；

expm2(A) Taylor 级数求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的指数；

expm3(A) 特征值特征向量法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的指数.

特征值和特征向量：

[V,D]=eig(A) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

行列式：

det(A) 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值.

代数方程组解：

x=A\b 解矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$；

[x,y]=solve('eqn1','eqn2') 解方程组 *eqn*1，*eqn*2，变

量为 x,y;

syms a b c x;S=a*x^2+b*x+c;solve(S) 解方程 $ax^2+bx+c=0$.

例 1 习题 6.3 的 1(1).

```
clear
m1=[-1 -1;1 -1];
[v,e]=eig(m1)
d=det(m1)
```

例 2 §6.1 例 2.

```
clear
m2=[-2,1,-1;1,-1,0;1,1,-1];
[v2,e2]=eig(m2)
d2=det(m2)
```

例 3 习题 6.1 的 3(2).

```
clear
[x,y]=solve('9*x-6*y+4*x*y-5*x^2','6*x-6*y-5*x*y+4*y^2')
```

3.2 向量场、等高线、微分方程数值解及其图形

向量场:

quiver(x,y,u,v) 向量起始点和终点坐标;

quiver3(x,y,z,u,v,w) 向量起始点和终点坐标.

等高线图:

contour(X,Y,Z,m) 绘制 m 条等高线平面图;

contour3(X,Y,Z,[a,b]) 绘制 Z 在$[a,b]$范围的等高线立体图.

常微分方程数值解:

1. 将高阶微分方程化为一阶微分方程组形式:

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}(a)=\boldsymbol{y}0 \quad (a\leqslant t\leqslant b);$$

2. 编写微分方程组的 M 文件，如文件名为 odefile.m，

```
function dy = odefile(t,y,p1,p2)
    dy = [f1;f2;…;fn];
```

3. 调用微分方程数值解函数：

```
[T,Y] = ode45('odefile',[a,b],y0)
```

其中 ode45 为龙格－库塔(4,5)法，其他有：

ode23 龙格－库塔(2,3)法；

ode113 多步 Adams－Bashforth－Moulton 法.

积分曲线图：plot(T,Y(:,1),'-r',T,Y(:,2),'.g')

轨线图：plot(Y(:,1),Y(:,2),'-r')

例 4 解微分方程 $y'=1-y^2, y(-3)=-0.99$.

```
clear
c=0.01;
x0=-3.1:0.2:3.;
y0=-3.:0.2:3.1;
[x,y]=meshgrid(x0,y0);
d=sqrt(1+(1-y.^2).^2);
u=c./d;
v=c*(1-y.^2)./d;
hold on
quiver(x,y,u,v)
hold off
[X,Y]=ode45('ode1',[-3,3],[-3;-0.99]);
hold on
plot(X,Y(:,2),'-r')
hold off
% ------- ode1.m -=----------------
function dy=ode1(x,y)
    dy=[1;1-y(2)^2];
% --------------------------
```

例 5 哈密顿函数 $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$ 的轨线图（等势面）.

```
clear
[X,Y]=meshgrid(-2:.1:2);
Z=Y.*Y/2-X.*X/2+X.^4/4;
mesh(X,Y,Z)
hold on
contour(X,Y,Z)
hold off
hold on
contour3(X,Y,Z)
hold off
```

例 6 V 函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(8x^2+4xy+y^2)$ 的等高线图及微分方程 $x'=y, y'=-2x-3y$ 的轨线图.

```
clear
[X,Y]=meshgrid(-10:.1:10);
Z=(8*X.*X+4*X.*Y+Y.*Y)/2;
hold on
contour(X,Y,Z,[0.2 1 3 8 15 25 40 80 200 500 1000])
axis([-10 10 -10 10])
hold off
[T,X]=ode45('fexa6',[0 20],[-10;10]);
hold on
plot(X(:,1),X(:,2),'-r')
hold off
[T,X]=ode45('fexa6',[0 20],[-8;-10]);
hold on
plot(X(:,1),X(:,2),'-g')
hold off
[T,X]=ode45('fexa6',[0 20],[8;10]);
```

```
hold on
plot(X(:,1),X(:,2),'-r')
hold off
[T,X]=ode45('fexa6',[0 20],[8;-10]);
hold on
plot(X(:,1),X(:,2),'-g')
hold off
%---fexa6.m---------------------
function dx=fexa6(t,x)
    dx=[x(2);-2*x(1)-3*x(2)];
%------------------------
```

例 7 范德波尔方程.

```
clear
global a
a=2;
[T,X]=ode45('VdPol',[0 20],[-3;0.1]);
hold on
plot(X(:,1),X(:,2),'-r')
hold off
[T,X]=ode45('VdPol',[0 20],[0;0.1]);
hold on
plot(X(:,1),X(:,2),'-g')
hold off
%---VdPol.m---------------------
function dx=VdPol(t,x)
    global a
    dx=[x(2)-a*(x(1)^3/3-x(1));-x(1)];
%------------------------
```

例 8 Lorenz 方程.

```
clear
global a b c
a=16;b=4;c=45;
```

```
[T,X]=ode45('Lorenz',[0,30],[12;4;0]);
hold on
plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3))
view(-20,60);
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
hold off
%------------Lorenz.m------------
function dx=Lorenz(t,x)
    global a b c
    dx=[a*(x(2)-x(1));c*x(1)-x(1)*x(3)-x(2);x(1)*x(2)
-b*x(3)];
%------------------------------
```

例 9 虫口模型.

```
clear
am=2;an=4;
ak=0.01;
m=1200;
x=0:0.01:1;
n=fix((an-am)/ak);
for k=1:n
    a=k*ak+am;
    y=x;
    for j=1:m
        z=a*y.*(1-y);
        y=z;
    end;
    u(k,:)=z;
end;
plot(u,'.')
```

例 10 孤立子图.

```
clear
a=4;c0=0;
```

```
[T,X]=meshgrid([-10:.1:10]);
U=sech(sqrt(a)*(X-a*T-c0).^2/2);
mesh(U)
hold on
plot3(T,X,U)
axis([-2 2 -3 3 0 2]);
xlabel('Time');ylabel('x');zlabel('u');
hold off

clear
[T,X]=meshgrid([-50:.8:50]);
Z=12*(3+4*cosh(8*T-2*X)+cosh(64*T-4*X))./(cosh(36
*T-3*X)+3*cosh(28*T-X)).^2;
mesh(Z)
hold on
plot3(T,X,Z)
axis([-3 3 -50 50 0 15]);
xlabel('Time');ylabel('x');zlabel('u');
hold off
```

3.3 拉普拉斯变换

L=laplace(F,t,z)　拉普拉斯变换；

F=ilaplace(L,y,x)　反拉普拉斯变换.

用于求解线性常微分方程时因要用到解代数方程，即要调用 Maple 核，其实例可参看后面的§4.3 中 Malpe 语言的拉普拉斯变换程序.

3.4 解常微分方程

y=dsolve('eqn')　解微分方程 *eqn*，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dt^2}$用 Dy，D2y 表示；

[u,v] = dsolve('eqn1','eqn2')　解微分方程组.

例 11　解微分方程 $y' = 1 - y^2, y(0) = 0$.

```
x = dsolve('Dx = 1 - x^2','x(0) = 0')
```

例 12　§5.2.2 例 2.

```
[x1,x2] = dsolve('Dx1 = x1 + x2 + exp(-t)','Dx2 = x2','x1(0) =
-1','x2(0) = 1')
```

§4　Malpe 语言

4.1　矩阵、行列式与代数方程组解

指数函数:exp(A)

特征值和特征向量:

eigenvals(A)

eigenvectots(A)

行列式:det(A)

解代数方程:

Solve({eqns},{vars})　求方程组 *eqns* 中的变量 *vars* 的解.

例 1　§5.3.1 例 3.

```
with(linalg):
A: = matrix(2,2,[3,5,-5,3]);
eigenvals(A);
eigenvectors(A);
det(A);
seq1 = solve({1 - x - y = 0,2 - 3 * x - y = 0},{x,y});
seq2 = solve({9 * x - 6 * y + 4 * x * y - 5 * x^2 = 0,6 * x - 6 * y - 5 * x * y
+ 4 * y^2 = 0},{x,y});
```

4.2　向量场、等高线、微分方程积分曲线图及轨线图

向量场:

dfieldplot(deqns,vars,trange,xrange,yrange,options)

等高线：

contourplot(expr1,x=a..b,y=c..d)　平面等高线图；

contourplot(f,a..b,c..d)　平面等高线图；

contourplot3d([f,g,h],a..b,c..d)　空间等高线图.

contourplot3d([exprf,exprg,exprh],s=a..b,t=c..d)

常微分方程积分曲线图及轨线图：

DEplot(deqns,vars,trange,inits,options)　常微分方程积分曲线图；

DEplot(deqns,vars,trange,inits,yrange,xrange,options) 平面轨线图；

DEplot3d(deqns,vars,trange,inits,options)　空间积分曲线图.

DEplot3d(deqns,vars,trange,xrange,yrange,inits,options)

例 2　解微分方程 $y'=1-y^2, y(-4)=2$ 和 $y(-4)=-0.99$.

```
with(DEtools):
DEplot(D(y)(x)=1-y(x)^2,y(x),x=-4..4,[[y(-4)=-0.99],[y(-4)=2]],title='AsymptoticSolution',colour=magenta,linecolor=[gold,yellow]);
```

例 3　哈密顿函数 $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$ 的轨线图(等势面).

```
with(plots):
contourplot(y^2/2-x^2/2+x^4/4,x=-2..2,y=-2..2);
```

例 4　V 函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(8x^2+4xy+y^2)$ 的等高图及微分方程 $x'=y, y'=-2x-3y$ 的轨线图.

```
with(plots):with(DEtools):
contourplot((8*x^2+4*x*y+y^2)/2,x=-10..10,y=-10..10,
```

contours = [0.2,1,5,10,30,60,100]);

DEplot([D(x)(t) = y(t),D(y)(t) = -2 * x(t) - 3 * y(t)],[x(t),y(t)],t =0..10,[[x(0) = -10,y(0) = 10],[x(0) = -8,y(0) = -10],[x(0) = 8,y(0) = 10],[x(0) = 10,y(0) = -8]],scene = [x(t),y(t)],stepsize = .01);

例 5 Lotka - Volterra 模型.

```
F2 := proc(N,t,X,XP)
  XP[1] := X[1] * (1 - X[2]);
  XP[2] := .3 * X[2] * (X[1] - 1)
end proc;
```

DEplot(F2,[x(t),y(t)],t = -7..7,number = 2,[[x(0) = 1.2,y(0) = 1.2],[x(0) = 1,y(0) = .7]],stepsize = .2,title = ' Lotka - Volterra model ', color = [.3 * y(t) * (x(t) - 1),x(t) * (1 - y(t)),.1],linecolor = t/2,arrows = MEDIUM,method = rkf45);

例 6 范德波尔方程.

with(DEtools):

DEplot([D(x)(t) = y(t) - 4 * (x(t)^3/3 - x(t)),D(y)(t) = -x(t)],[x(t),y(t)],t = 0..10,[[x(0) = -3,y(0) = 3],[x(0) = 0,y(0) = .3]],stepsize = .015,scene = [x(t),y(t)],linecolour = sin(t * Pi/2),method = classical[foreuler]);

例 7 Lorenz 方程.

with(DEtools):

DEplot3d({D(x)(t) = 16 * y(t) - 16 * x(t),D(y)(t) = 130 * x(t) - x(t) * z(t) - y(t),D(z)(t) = x(t) * y(t) - 4 * z(t)},{x(t),y(t),z(t)},t = 0..10,[[x(0) = 2,y(0) = 4,z(0) = 0]],scene = [x(t),y(t),z(t)],stepsize = .001,orientation = [139, -106]);

例 8 虫口模型.

```
restart:with(plots):
as: = 2;ae: = 4;ak: = 0.01;im: = 150;mk: = .01;
n: = round((ae - as)/ak);m: = round(1/mk);
u: = array(1..m);v: = array(1..n);
for k from 1 to n do
```

```
        a: = as + k * ak;
        for i from 1 to m do
            x: = i * mk;
            for j from 1 to im do y: = a * x * (1 - x); x: = y; od;
            u[i]: = y;
        od;
        v[k]: = [[a,u[1]] $ 1 = 1..m];
    od;
    P: = [seq(v[k],k = 1..n)];
    plot(P,style = point,symbol = point,labels = [A,X]);
```

例 9 孤立子图.

```
restart: with(plots):
a: = 4; c0: = 0;
plot3d(sech(sqrt(a) * (x - a * t - c0)/2)^2/2,t = -3..3,x = -10..10);

restart: with(plots):
plot3d(12 * (3 + 4 * cosh(8 * t - 2 * x) + cosh(64 * t - 4 * x))/(cosh(36
* t - 3 * x) + 3 * cosh(28 * t - x))^2,t = -3..3,x = -10..10);
```

4.3 拉普拉斯变换

L: = laplace(F,t,s)　拉普拉斯变换;

F: = invlaplace(L,s,t)　反拉普拉斯变换.

例 10 §5.3.2 例 12.

```
restart: with(inttrans):
L: = laplace({diff(x(t),t) = 2 * x(t) + y(t),diff(y(t),t) = - x(t) + 4 *
y(t)},t,s);
L1: = subs(x(0) = 0, y(0) = 1, laplace(x(t), t, s) = X(s), laplace
(y(t),t,s) = Y(s),L);
soL1: = solve(L1,{X(s),Y(s)});
x1: = invlaplace(soL1[2],s,t);
y1: = invlaplace(soL1[1],s,t);
L2: = subs(x(0) = 1,y(0) = 0,laplace(x(t),t,s) = X(s),laplace(y(t),t,s)
```

```
= Y(s),L);
    soL2:=solve(L2,{X(s),Y(s)});
    x2:=invlaplace(soL2[2],s,t);
    y2:=invlaplace(soL2[1],s,t);
```

4.4 解常微分方程

dsolve(ode) 解常微分方程 *ode*；

dsolve(ode,y(x),options) 解常微分方程 *ode*；

dsolve({ode,ICs},y(x),options) 解常微分方程 *ode*.

例 11 解微分方程 $y'=1-y^2, y(0)=0$.

```
dsolve({D(y)(x)=1-y(x)^2,y(0)=0},y(x));
```

例 12 §5.2.2 例 2.

```
dsolve({D(x1)(t)=x1(t)+x2(t)+exp(-t),D(x2)(t)=x2(t),
x1(0)=-1,x2(0)=1},{x1(t),x2(t)});
```

习 题 答 案

（仅供参考）

习题　1.2

1.（1）一阶线性；（2）二阶非线性；（3）一阶非线性；（4）二阶线性；（5）一阶非线性；（6）二阶非线性.

4.（1）$y=x^2+c$；（2）$y=x^2+3$；（3）$y=x^2+4$；（4）$y=x^2+\frac{5}{3}$.

5. $y=x^2$.

6. $y=0$ 及 $y=x+1$.

8.（1）$y'=\frac{y+x\tan\alpha}{x-y\tan\alpha}$；

（2）$\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=l^2$；

（3）$\left|(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=2a^2$；

（4）$xy'+y=0$；

（5）$y-xy'=x^2$；

（6）$y-xy'=\frac{x+y}{2}$；

（7）$y'=kx$（$k>0$ 为常数）.

习题　2.1

1.（1）通解 $y=ce^{x^2}$，特解 $y=e^{x^2}$；

(2) 通解 $y=\dfrac{1}{c+\ln|1+x|}$，另有解 $y=0$，特解 $y=\dfrac{1}{1+\ln|1+x|}$；

(3) $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$；

(4) $x-y+\ln|xy|=c, y=0$；

(5) $\arctan\dfrac{y}{x}+\ln|\sqrt{x^2+y^2}|=c$；

(6) $\arcsin\dfrac{y}{x}=\ln|x|+c,\ y^2=x^2$；

(7) $\sin y\cos x=c, y=k\pi, k=0,\pm1,\cdots$；

(8) $2e^{3x}-3e^{-y^2}=c$；

(9) $1+\ln\dfrac{y}{x}=cy$；

(10) $e^y=e^x+c$.

2. (1) $y=\tan(x+c)-x$；

(2) $y=\arctan(x+y)+c$；

(3) $x^2-xy+y^2+x-y=c$；

(4) $x^2+y^2-2xy+4y+10x=c$；

(5) $\tan(6x+c)=\dfrac{2}{3}(x+4y+1)$；

(6) $(y^3-3x)^7(y^3+2x)^3=cx^{15}$；

(7) $(y^2-x^2+2)^5=c(x^2+y^2)$.

3. (1) $y=cx\sqrt{x^2y^2+2}$；

(2) $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{1}{4}x^2y^2+c$.

4. $f(x)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

5. $x(t)=\tan[x'(0)t]$.

6. $y'=-\dfrac{y}{x}$；$xy=c$.

7. (1) $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=E(t=0,u_C=0), t=\ln 2$；

(2) $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0(t=0,u_C=E), t=\ln 2$.

8. $r=ce^{\theta}(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$.

习题 2.2

1. (1) $y=ce^{x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$;

   (2) $x=ce^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$;

   (3) $s=ce^{-\sin t}+\sin t-1$;

   (4) $y=x^{n}(e^{x}+c)$;

   (5) $y=x^{2}(1+ce^{\frac{1}{x}})$;

   (6) $y^{3}=x^{3}(3x+c)$;

   (7) $2y=c(x+1)^{2}+(x+1)^{4}$;

   (8) $2x=cy+y^{3}, y=0$;

   (9) $y=\begin{cases} cx^{a}+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}, & a\neq 0,1, \\ x+\ln|x|+c, & a=0, \\ cx+x\ln|x|-1, & a=1; \end{cases}$

   (10) $y=\frac{c}{x}+\frac{x^{3}}{4}$;

   (11) $y^{2}(x^{2}+1+ce^{x^{2}})=1, y=0$;

   (12) $y(cx^{2}+1+2\ln x)=4, y=0$;

   (13) $y^{2}=x+cx^{2}$;

   (14) $\frac{1}{2}x^{2}+x^{3}e^{-y}=c$;

   (15) $(1-x^{2}+x^{2}y^{2})e^{y^{2}}=cx^{2}$;

   (16) $y=(1+x)e^{x}$.

2. $\varphi(t)=e^{t\varphi'(0)}$

3. (1) 约 5 A; (2) 约 7.5 A.

4. $I=\dfrac{U_{m}}{\sqrt{R^{2}+(L\omega)^{2}}}[\sin(\omega t+\varphi)-e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\sin\varphi]$,

   其中 $\sin\varphi=\dfrac{-L\omega}{\sqrt{R^{2}+(L\omega)^{2}}}$, $\cos\varphi=\dfrac{R}{\sqrt{R^{2}+(L\omega)^{2}}}$.

6. (5) $y=cx-x^{2}$; (6) $y=c\sqrt{x}-x$.

7. (1) $y=c\sqrt{|1-x^2|}+x$; (2) $y=x(1+c\sqrt{|1-x^2|})$;
(3) $y=\cot x+\sin x$.

习题 2.3

1. (1) $x^3+3xy-3y^2=c$;
(2) $x^3-xy+2y^2=c$;
(3) $\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{xy}{x-y}=c$;
(4) $x^4+3x^2y^2+y^3=c$;
(5) $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=c$.

2. (1) $ye^{x^2}-x^2=c$;
(2) $(x^2-2x+2)e^x+x^3y^2=c$;
(3) $y(x^2+1)=c$;
(4) $\arctan\frac{x}{y}=x+c$;
(5) $2x=y(y^2+c), y=0$;
(6) $xy+1=ce^x$;
(7) $y=x(c-x)$;
(8) $x^3+3x^2y=c$;
(9) $x\sin(x+y)=c$;
(10) $e^y x\cos x+e^y(y-1)\sin x=c$;
(11) $x^4y^2+x^3y^5=c$.

3. $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(x+y)$; $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=g(xy)$.

8. $\mu=y^{-n}e^{(n-1)\int P(x)dx}$.

习题 2.4

1. (1) 令 $y'=\frac{1}{t}$, $x=t^3+t^2$, $y=\frac{3}{2}t^2+2t+c$;

(2) 令 $y' = tx$，$x = \frac{1}{t} - t^2$，$y = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{5}t^5 + c$；

(3) 令 $y' = p, y = p^2 e^p, x = (p+1)e^p + c, y = 0$;

(4) 令 $y' = \tan\varphi, y = a(1+\cos 2\varphi), x = -a(2\varphi + \sin 2\varphi) + c, y = 2a$;

(5) 令 $y' = \cos t, x = \sin t, y = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c$;

(6) $y = x - \frac{1}{x-c} - c$.

习题 2.5

1. (1) $y = c\cos x + \sin x$;

(2) $\frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = c$;

(3) $e^y = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$;

(4) $x = y\left(c - \frac{1}{2}\ln|y|\right)^2, y = 0$;

(5) $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = c$;

(6) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = c, y = 0$;

(7) $(x+y+1)^3 = ce^{2x+y}$;

(8) $\frac{1}{y} = \frac{c}{x} + \frac{1}{x^2}, y = 0$;

(9) $y = ce^{3x} - \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$;

(10) $x = \frac{1}{p} + p, y = \frac{1}{2}p^2 - \ln|p| + c$;

(11) $\frac{1}{2}x^2 - xy + x - \frac{1}{3}y^3 - 3y = c$;

(12) $e^{-(x+y)} + \frac{x^2}{2} = c$;

(13) $cx = x^2 - y^2$;

(14) $x + y + 2 = ce^x$;

(15) $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = c$;

(16) $(x+1)e^{y}=2x+c$;

(17) $y^{2}=c(x+1)^{2}+2x+1$;

(18) $(x^{3}y-3)^{2}y^{\frac{1}{2}}=c$;

(19) $2cy=c^{2}x^{2}+4$; $y=\pm 2x$;

(20) $y^{2}=(x+c)^{2}+1, y=\pm 1$;

(21) $x+ye^{\frac{x}{y}}=c$;

(22) $x^{2}-y^{2}=cy^{3}$;

(23) $x+1=y(y+c)$; $y=0$;

(24) $\arctan\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^{2}}{2}+c$;

(25) $x=p+e^{p}, y=\dfrac{p^{2}}{2}+(p-1)e^{p}+c$;

(26) $(3x^{2}y+y^{3})e^{x}=c$;

(27) $9\ln\left(2x+3y+\dfrac{22}{7}\right)=14\left(3y-\dfrac{3}{2}x+c\right), 2x+3y+\dfrac{22}{7}=0$;

(28) $x^{2}-y^{2}=cy^{2}e^{x^{4}}$;

(29) $\dfrac{1}{2}x^{2}+e^{-xy}=c$;

(30) $(x^{2}+1)(y^{3}-1)=x^{4}+y^{6}+c$;

(31) $(x^{2}+y^{2})(y+1)^{2}=cy^{2}, y=0$;

(32) $\sqrt{x^{2}y^{2}-1}=c(x+y), x+y=0$.

2. $y-xy'=x$; $y=cx-x\ln|x|$.

3. $\dfrac{dv}{dt}=kv$; $v\approx 0.233$ m/s.

4. $m\dfrac{dv}{dt}=k_{1}t-k_{2}v(k_{2}>0)$, $t=0$ 时, $v=0$;

$$v=\frac{k_{1}m}{k_{2}^{2}}e^{-\frac{k_{2}}{m}t}+\frac{k_{1}}{k_{2}}\left(t-\frac{m}{k_{2}}\right).$$

5. (1) $\tilde{y}=e^{x}, y=e^{x}+\dfrac{1}{c+e^{x}}$;

(2) $\tilde{y}=\sin x, y=\sin x+\dfrac{1}{x+c}$;

(3) $\tilde{y}=-\dfrac{1}{x}, xy=\dfrac{1}{c-\ln|x|}-1$;

(4) $\tilde{y}=-\frac{1}{2x}, 2xy=\frac{2}{c-\ln|x|}-1$;

(5) $\tilde{y}=-\frac{1}{x}, xy=\frac{2x^3-c}{x^3+c}$;

(6) $\tilde{y}=\frac{1}{x}, xy=\frac{4x^3+c}{x^3+c}$;

(7) $\tilde{y}=1, y=1+\frac{1}{x+ce^x}$.

习题　3.1

1. $y_3=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4\,400}$.

2. $y_2=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{20}x^5-\frac{11}{30}$.

3. $|x+1|\leqslant\frac{1}{4}$; $y_2=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{9}-\frac{x^4}{18}-\frac{x^7}{63}+\frac{11}{42}$; $|y-y_2|\leqslant\frac{1}{24}$.

4. $|y|\geqslant\sigma>0$, σ 为任一正常数;

   通过(0,0)的一切解为 $y=0$ 及

   $$|y|=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\ (x-c)^{\frac{3}{2}}, & x>c,\end{cases}$$ 其中 $c\geqslant 0$ 为任意常数.

习题　3.3

1. $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y}\mathrm{d}s\right)$.

2. $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-[P(x_0)y_0+Q(x_0)]\exp\left(\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right)$;

   $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}P(s)\mathrm{d}s\right)$;

   $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x)\varphi(x,x_0,y_0)+Q(x)$.

3. 当 $x_0=1, y_0=0$ 时 $\frac{\partial y}{\partial x_0}=0, \frac{\partial y}{\partial y_0}=|x|$.

4. 当 $x_0=y_0=0,\lambda=1$ 时，$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=0,\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=e^{\frac{1}{2}x^2}$.

习题 3.4

1. (1) $x=\frac{c}{p^2},y=\frac{2c}{p}+c^2$，$p\neq0$ 为参数，$c\neq0$ 是任意常数，$y=0$，奇解 $x=-\frac{1}{2p^3},y=-\frac{3}{4p^2},p\neq0$；

   (2) $x=2p+\ln(p-1)^2+c,y=p^2+2p+\ln(p-1)^2+c,y=x+1$；

   (3) $y=cx+\sqrt{1+c^2}$，奇解 $y=\sqrt{1-x^2}$；

   (4) $y=cx+c^2$，奇解 $x^2+4y=0$；

   (5) $x=\frac{c}{3p^2}-\frac{2}{3}p,y=\frac{2c}{3p}-\frac{1}{3}p^2$；

   (6) $y=cx-\frac{1}{c^2}$，奇解 $27x^2+4y^3=0$；

   (7) $x=ce^{-p}-2p+2,y=c(p+1)e^{-p}-p^2+2$；

   (8) $9(y+c)^2=4x(x-3a)^2$；

   (9) $\begin{cases}x=-\frac{(p+2)^2}{2}-3\ln|p-2|+c,\\ y=-\frac{1}{3}p^3-p^2-3p-4-6\ln|p-2|+2c,\end{cases}$

   $y=2x-\frac{2}{3}$；

   (10) $y=c(x+1)+c^2$，奇解 $(x+1)^2+4y=0$.

2. (1) $x^2+4y=0$；(2) $x^4+4y=0$；

   (3) $(x-y)^2=8$；(4) $y^2=4(x+1)$.

3. $4ax=(x-y+a)^2$.

习题 3.5

2. 1 200.

习题 4.1

3. (1) $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$;

   (2) $x = c_1 e^t + c_2 t - (t+1)^2$;

   (3) $x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{t^2}{8}\cos 2t + \frac{t}{16}\sin 2t$;

   (4) $x = (c_1 t^2 + c_2 t^3) + \frac{1}{t}\left(3\ln t + \frac{7}{4}\right)$;

   (5) $x = (c_1 + c_2 \ln t)t + 3t\ln^2 t + 34t^2$;

   (6) $x = [c_1\cos(2\ln t) + c_2\sin(2\ln t)]t^2 - \frac{18}{13}t^2\sin(\ln t)$.

4. $\mathrm{ch}\, t, \mathrm{sh}\, t$; $x = x_0 \mathrm{ch}\, t + x_0' \mathrm{sh}\, t$.

习题 4.2

2. (1) $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$;

   (2) $x = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{at}$;

   (3) $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t^2 + c_4 t + c_5$;

   (4) $x = \left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$;

   (5) $a \neq 0, s = c_1 e^{-at} + c_2 e^{at} - \frac{1}{a^2}(t+1)$,

   $a = 0, s = c_1 + c_2 t + \frac{1}{6}t^2(t+3)$;

   (6) $x = c_1 e^{2t} + e^t(c_2 t + c_3) - t - 4$;

   (7) $x = e^t(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_3 + c_4 t) + t^2 + 1$;

   (8) $x = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$;

   (9) $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\sin 2t$;

(10) $x=e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+c_3e^t+\frac{1}{3}te^t$;

(11) $a\neq-1, s=e^{-at}(c_1+c_2t)+\frac{1}{(a+1)^2}e^t$,

$a=-1, s=e^t\left(c_1+c_2t+\frac{1}{2}t^2\right)$;

(12) $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}+\frac{1}{21}e^{2t}$;

(13) $x=e^t(c_1\cos\sqrt{2}t+c_2\sin\sqrt{2}t)+\frac{1}{41}(5\cos t-4\sin t)e^{-t}$;

(14) $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{2}t\cos t$;

(15) $x=e^{2t}(c_1+c_2t)+\frac{1}{2}t^2e^{2t}+e^t+\frac{1}{4}$;

(16) $x=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t-\frac{1}{12}t^2\cos 3t+\frac{1}{36}t\sin 3t$;

(17) $x=e^t(c_1\cos t+c_2\sin t)+\frac{1}{4}te^t(\cos t+t\sin t)$;

(18) $x=(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)e^{-t}+e^{-t}-4\cos 2t+\sin 2t$;

(19) $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2\sin t}$;

(20) $x=c_1\cos t+c_2\sin t+1+t\cos t-\sin t\cdot\ln|\sin t|$.

3. (1) $x=c_1t+c_2\frac{1}{t}$;

(2) $x=c_1t^2+c_2t^3+\frac{1}{2}t$;

(3) $x=t^2[c_1\cos(2\ln t)+c_2\sin(2\ln t)]+t\left(\frac{2}{121}-\frac{1}{11}\ln t\right)$;

(4) $x=t[c_1\cos(\ln t)+c_2\sin(\ln t)]+9t\ln t\sin(\ln t)$.

4. (1) $x=\frac{1}{3}(e^{3t}-\cos 3t-\sin 3t)$;

(2) $x=e^t$.

5. $S=\frac{F-a}{b}t-\frac{(F-a)P}{b^2g}\left[1-\exp\left(-\frac{bg}{P}t\right)\right]$.

习题 4.3

1. (1) $9(x+c_2)^2=4(t+c_1)^3$;

(2) $x + c_1 \ln|x| = t + c_2, x = c$;

(3) $(x-1)(c_1 t + c_2) = 1$;

(4) $x = \cos(t + c_1) + c_2$ 或 $x = \sin(t + c_1) + c_2, x = \pm t + c$;

(5) $(t - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = a^2$ 或 $t = -a\sin\varphi + c_1, x = a\cos\varphi + c_2$;

(6) $e^x = c_2(t^2 + c_1), x = c$.

2. (1) $x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{1\cdot3\cdot5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)} + \cdots$;

(2) $$x = c_1\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}t^4 - \frac{2}{5!}t^5 - \cdots\right) + c_2\left(t - \frac{1}{3!}t^3 - \frac{2}{4!}t^4 - \frac{5}{5!}t^5 - \cdots\right);$$

(3) $$x = c_1\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\cdot4} + \frac{t^6}{2\cdot4\cdot6} + \cdots\right) + c_2\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{3\cdot5} + \frac{t^7}{3\cdot5\cdot7} + \cdots\right).$$

3. $x = c_1 J_{\frac{1}{2}}(t) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}(c_1 \sin t + c_2 \cos t)$.

4. $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, $t = 0$ 时, $x = 0, \frac{dx}{dt} = 0$,

$$x = \frac{m}{k}\ln\left[\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\right].$$

6. $x = \left(\frac{1}{3}c_1 t^3 + c_2\right)e^t$.

习题 5.1

2. (1)

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7t & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \varphi(1) = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix};$$

(2)

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ te^t \end{bmatrix}, \varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

(3)

$$w' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 2 & -13 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}, w(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.

$$\varphi_3(t) = \begin{bmatrix} t - \dfrac{t^3}{3!} \\ l - \dfrac{t^2}{2!} \end{bmatrix}.$$

习题　5.2

8. (2) $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{25}(-15t+27)e^{2t} - \dfrac{2}{25}\cos t - \dfrac{14}{25}\sin t \\ -\dfrac{3}{5}e^{2t} - \dfrac{2}{5}\cos t + \dfrac{1}{5}\sin t \end{bmatrix}.$

9. $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \left(1 - t + \dfrac{1}{2}t^2\right)e^{2t} \\ (t-1)e^{2t}, \end{bmatrix}.$

10. (1) $x = \cos t \ln \cos t + t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$;

(2) $x = (c_1 \cos\sqrt{3}t + c_2 \sin\sqrt{3}t)e^{-t} + c_3 e^{2t} + \dfrac{1}{12}te^{2t}$;

(3) $x = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + \dfrac{1}{4}e^t$.

11. $\begin{cases} x_1 = -c_1 \sin t + c_2 e^t \cos t, \\ x_2 = c_1 \cos t + c_2 e^t \sin t. \end{cases}$

12. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t^2 - t^2 \ln t \\ -t & t\ln t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2}\ln t - \dfrac{t^2}{2}(\ln t)^2 + \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{t^4}{4} \\ \dfrac{t}{2}(\ln t)^2 + \dfrac{t}{2}\ln t - \dfrac{3}{4}t^3 + \dfrac{3}{4}t \end{pmatrix}.$$

习题　5.3

3. (1) $\lambda=-1, x=\begin{bmatrix}\beta\\-\beta\end{bmatrix}, \beta\neq 0; \lambda=5, x=\begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\end{bmatrix}, \alpha\neq 0;$

(2) $\lambda=-1, x=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \alpha\neq 0; \lambda=-2, x=\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \beta\neq 0;$

$\lambda=2, x=\gamma\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \gamma\neq 0;$

(3) $\lambda=3, x=\alpha\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, \alpha\neq 0;$ $\lambda=-1$(二重根), $x=\beta\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}, \beta\neq 0;$

(4) $\lambda=-1, x=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \alpha\neq 0; \lambda=-2, x=\beta\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}. \beta\neq 0;$

$\lambda=-3, x=\gamma\begin{bmatrix}1\\-3\\9\end{bmatrix}, \gamma\neq 0.$

4. (1) $\exp \boldsymbol{A}t$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}+(2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{3}t}\\ -e^{\sqrt{3}t}+e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t}-(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t}\end{bmatrix};$$

(2) $$\exp \boldsymbol{A}t=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ 2e^{5t}-2e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t}\end{bmatrix};$$

(3) $$\exp \boldsymbol{A}t=\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{-t}-e^{2t} & -e^{-t}+e^{2t}\\ -e^{-2t}+e^{2t} & e^{-t}+e^{-2t}-e^{2t} & -e^{-t}+e^{2t}\\ -e^{-2t}+e^{2t} & e^{-2t}-e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$$

(4) $$\exp \boldsymbol{A}t=\left(\exp \boldsymbol{A}t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\exp \boldsymbol{A}t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\exp \boldsymbol{A}t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right),$$

$$\exp \boldsymbol{A}t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix}2\sqrt{7}e^{-3t}+(3+\sqrt{7})e^{(2+\sqrt{7})t}+(-3+\sqrt{7})e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-14\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-13+7\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-10+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix},$$

$$\exp \boldsymbol{A}t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{5-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-5-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-14\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{53+25\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-8\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{2+4\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix},$$

$$\exp \boldsymbol{A}t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix}\frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}+\frac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix}.$$

5. (1) $\varphi(t)=\begin{bmatrix}2e^{5t}+e^{-t}\\4e^{5t}-e^{-t}\end{bmatrix}$;

(2) $\varphi(t)=\frac{1}{4\sqrt{7}}\begin{bmatrix}\frac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t}+\frac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t}\\ \qquad+\frac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-364\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}\\ \qquad+\frac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\\ \frac{-208\sqrt{7}}{9}e^{-3t}+\frac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t}\\ \qquad+\frac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t}\end{bmatrix}$;

(3) $\exp \boldsymbol{A}t=$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+\left(t-\frac{1}{4}\right)e^{-t} & \frac{3}{8}e^{3t}+\left(-\frac{1}{2}t-\frac{3}{8}\right)e^{-t}\\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{8}e^{3t}+\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{8}\right)e^{-t} & \frac{3}{16}e^{3t}+\left(\frac{1}{4}t-\frac{3}{16}\right)e^{-t}\\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}+\left(-t-\frac{1}{4}\right)e^{-t} & \frac{3}{8}e^{3t}+\left(\frac{1}{2}t+\frac{5}{8}\right)e^{-t}\end{bmatrix},$$

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\\ \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}.$$

6. (1) $\varphi(t)=\begin{bmatrix}\frac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}$;

(2) $\varphi(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-3t}-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}\\ -2e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t}\\ 4e^{-2t}-\frac{9}{4}e^{-3t}-\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}\end{bmatrix}$;

(3) $\varphi(t)=\begin{bmatrix}\cos t-2\sin t+e^{t}(-4-2\eta_1+3\eta_2)+3e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\\ 2\cos t-2\sin t+e^{t}(-4-2\eta_1+3\eta_2)+2e^{2t}(1+\eta_1-\eta_2)\end{bmatrix}$

10. (1) $\varphi_1(t)=\frac{1}{2}t+1,\varphi_2(t)=-\frac{1}{2}t$;

(2) $\varphi_1(t)=\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{12}e^{2t},\varphi_2(t)=\frac{1}{3}(e^{-t}-e^{2t})$;

(3)
$$\begin{aligned}x_1(t)=&\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t\right.\\&\left.+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}\\&+\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t\right.\\&\left.+\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2(t)=&\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t\right.\\&\left.+\left(-\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{\frac{m}{\sqrt{2}}t}\\&+\left[\left(\frac{1}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\sin\frac{m}{\sqrt{2}}t\right.\\&\left.+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4\right)\cos\frac{m}{\sqrt{2}}t\right]e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}t}.\end{aligned}$$

习题 6.1

1. (1) $x=0$ 不稳定；$x=-\frac{A}{B}$ 稳定；

(2) $x_0=0,x=0;0<x_0<3,x\to1;x=1$ 稳定，$x=0$ 及 $x=3$ 不稳定；

(3) $x_0=0,x=0;x_0<1,x\to0;x_0>1,x\to3;x=1$ 不稳定，$x=0$ 及 $x=3$ 稳定.

3. (1) $(0,0),(1,0),(0,2)$ 及 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；$x=y=0$ 和 $x=y=\frac{1}{2}$，不稳

定；$x=1,y=0$ 和 $x=0,y=2$,渐近稳定；

(2) $(0,0),(1,2),(2,1)$；$x=y=0$ 和 $x=1,y=2$,不稳定；$x=2,y=1$ 渐近稳定；

(3) $(0,0),\left(-\frac{1}{\mu},0\right)$；$x=y=0$ 和 $x=-\frac{1}{\mu},y=0$ 不稳定；

(4) $(0,0),(1,1)$；$x=y=0$ 不稳定；$x=y=1$ 渐近稳定.

4. (1) 渐近稳定；

(2) $\mu<-\frac{1}{2}$,渐近稳定,$\mu=-\frac{1}{2}$,稳定,$\mu>-\frac{1}{2}$,不稳定；

(3) 不稳定.

5. 不稳定.

习题 6.2

1. (1) 常正；(2) 变号；(3) 定正；(4) 定正；(5) 变号.

2. (1) 稳定；(2) 渐近稳定；(3) 渐近稳定；(4) 不稳定.

3. (1) 渐近稳定；(2) 不稳定；(3) 稳定；(4) $a\leqslant 0$,稳定；$a>0$,不稳定. (5) $a<0$,渐近稳定；$a=0$,稳定；$a>0$,不稳定.

5. 稳定.

6. 不能；渐近稳定.

7.

(1) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{7}{6} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & \frac{5}{54}\end{bmatrix}$,定正；

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\frac{31}{58} & 2\frac{41}{58} & \frac{1}{2}\\ 2\frac{41}{58} & 3\frac{12}{29} & \frac{31}{58}\\ \frac{1}{2} & \frac{31}{58} & \frac{6}{29}\end{bmatrix}$,定正.

8. $V(x_1,x_2)=\frac{1}{96}(39x_1^2-98x_1x_2+143x_2^2)$,定正.

习题 6.3

1. (1) $(3,-2)$,稳定焦点;

(2) $(1,3)$,中心奇点.

2. 奇点$(0,0)$,$ac<0$,鞍点;$ac>0$,$a\neq c$,$a>0$,不稳定结点;$ac>0$,$a\neq c$,$a<0$,稳定结点;$a=c$,$b\neq 0$,退化结点;$a=c$,$b=0$,奇结点.

3. (1) $q<0$,鞍点;$q>0$,$p=0$,中心奇点;$\Delta<0$,$p\neq 0$,焦点;$\Delta\geqslant 0$,$q>0$,结点;$q=0$,存在奇线;

(2) $p>0$,$q>0$,渐近稳定;$p=0$,$q>0$,稳定;$p<0$ 或 $q<0$,不稳定.

4. $R>0$:$R^2C-4L>0$,稳定结点,$R^2C-4L=0$,稳定退化结点,$(R^2C-4L)<0$,稳定焦点;$R=0$,中心奇点.

习题 6.4

1. (1) $x^2+y^2=1$,半稳定极限环;

(2) $x^2+y^2=1$,稳定极限环;

(3) $x^2+y^2=1$,稳定极限环;$x^2+y^2=9$,不稳定极限环.

2. (1) 无; (2) 无; (3) 在域 $x^2+y^2=2$ 内存在不稳定极限环.

4. 例如 $B(x,y)=b\mathrm{e}^{-2\beta x}$.

习题 6.5

1. (1) $\lambda=1$;(2) $\lambda=1,-1$;(3) $\lambda=4^{-\frac{1}{3}}$.

2. (1) $\lambda=\pm 2$;(2) $\lambda=\frac{1}{4}$;(3) $\lambda=0,\frac{1}{64}$.

习题 6.6

2. (1) $H(x,y)=3x^2+3y^2-2x^3$;

(2) $H(x,y)=2x^2+2y^2-x^4$;

(3) $H(x,y)=-2x^2+2y^2+x^4$.

4. (1) $H(x,y)=3x^2+3y^2-2x^3$;

(2) $\begin{cases} x=1-\dfrac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\dfrac{1}{2}(t-t_0)\right), \\ y=\dfrac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\dfrac{1}{2}(t-t_0)\right)\tanh\left(\dfrac{1}{2}(t-t_0)\right); \end{cases}$

(3) $M(t_0)=-\dfrac{6}{5}k+\dfrac{3}{2}\pi\mu(4\omega^2-1)\operatorname{csch}(\pi\omega)\cdot\sin\omega t_0$;

(4) $\dfrac{k}{|\mu|}<\dfrac{5}{4}\pi|4\omega^2-1|\operatorname{csch}(\pi\omega)$.

习题 7

1. (1) $\begin{cases} \left[\dfrac{1}{4}(2t+1)+x+y\right]e^{-2t}=c_1, \\ \dfrac{1}{2}t^2+x-y=c_2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x+y+2)e^{-t}=c_1, \\ (x-y)e^{t}=c_2, \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=-(1+e^{-t}), \\ y=e^{-t}-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (x-y)^2+y^2=c_1, \\ \operatorname{arccot}\dfrac{x-y}{y}-t=c_2, \end{cases}$

或 $\begin{cases} x=(c_2+c_1)\cos t+(c_2-c_1)\sin t, \\ y=c_1\cos t+c_2\sin t, \end{cases}$

$\begin{cases} x=\cos t-\sin t, \\ y=\cos t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y+z=c_1, \\ x^2+y^2+z^2=c_2; \end{cases}$

2. (1) $u=\Phi(x^2+y^2,xy+z)$;

(2) $u=\Phi(x^2+y^2+z^2,y^2-2yz-z^2)$;

(3) $\Phi\left(xy,\dfrac{y^2}{x}-3z\right)=0$;

(4) $\Phi\left(zx^3y^3,\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}\right)=0$;

(5) $\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x},\frac{u}{x^n}\right)=0$;

(6) $\Phi((x-u)s^{\frac{1}{3}},(y-u)s^{\frac{1}{3}},(z-u)s^{\frac{1}{3}})=0$,

$s=x+y+z+u$;

(7) $\Phi(x+y+z,xyz)=0$;

(8) $\Phi\left((x-y)^2(x+y+z),\frac{x-y}{z-x}\right)=0, z=y$;

(9) $\Phi(xy,zy)=0, z=3x$;

(10) $\Phi(z,2x-zy^2)=0, z^5=(zy^2-2x)^3$.

3. (1) $\Phi(x^2+z^2,x^2-y^2)=0$;

(2) $\Phi(z^2-x^2,x^2-y^2)=0$;

(3) $\Phi(z^2+2x^2,x^2-y^2)=0$.

参考文献

1 朱思铭,李尚廉.数学模型.广州:中山大学出版社,1995

2 姜启源,谢金星,叶俊.数学模型.第三版.北京:高等教育出版社,2003

3 陈兰荪.数学生态学模型与研究方法.北京:科学出版社,1991

4 [美]洛伦茨 E N.混沌的本质.刘式达等译.北京:气象出版社,1997

5 [苏]阿诺尔德 B N.经典力学的数学方法.齐民友译.北京:高等教育出版社,1992

6 [美]WILLIAN F LUCAS.微分方程模型.朱煜民,周宇虹译.长沙:国防科技大学出版社,1988

7 中国大百科全书·数学.北京:中国大百科全书出版社,1988

8 Smale S.在里约热内卢的海滩上发现了马蹄.连冠华、杨文萍、张超译.数学译林,1999,(2):114～122

9 [美]塞蒙斯 G F.微分方程.张理京译.北京:人民教育出版社,1981

10 卡姆克 E.常微分方程手册.张鸿林译.北京:科学出版社,1977

11 胡健伟,汤怀民.微分方程数值方法.北京:科学出版社,1999

12 尤秉礼.常微分方程补充教程.北京:人民教育出版社,1981

13 丁同仁,李承治.常微分方程.北京:高等教育出版社,1985

14 许淞庆.常微分方程稳定性理论.上海:上海科技出版社,1964

15 黄琳.稳定性理论.北京:北京大学出版社,1992

16 廖晓昕.动力系统的稳定性理论和应用.北京:国防工业出版

社,2000
17 莱夫谢茨 S.微分方程几何理论.许淞庆译.上海:上海科技出版社,1964
18 张芷芬,丁同仁,黄文灶等.微分方程定性理论.北京:科学出版社,1985
19 叶彦谦.极限环论.上海:上海科技出版社,1984
20 叶彦谦.多项式微分系统定性理论.上海:上海科技出版社,1995
21 张锦炎,冯贝叶.常微分方程几何理论与分支问题.第二次修订本.北京:北京大学出版社,1987
22 张芷芬,李承治,郑志明等.向量场的分岔理论基础.北京:高等教育出版社,1995
23 唐云.对称性分岔理论基础.北京:科学出版社,2000
24 罗定军,张祥,董梅芳.动力系统的定性与分支理论.北京:科学出版社,2001
25 丁同仁.常微分方程定性方法的应用.北京:北京大学出版社,1987
26 郝柏林.分岔、混沌、奇怪吸引子·湍流及其他.物理学进展,1983,3(3):329～416
27 陈关荣,吕金虎.Lorenz系统族的动力学分析控制与同步.北京:科学出版社,2003
28 盛昭瀚,马军海.非线性动力系统分析引论.北京:科学出版社,2001
29 李继彬,冯贝叶.稳定性分支与混沌.昆明:云南科技出版社,1995
30 程崇庆,孙义燧.哈密顿系统中的有序与无序运动.上海:上海科技教育出版社,1996
31 谷超豪等.孤立子理论与应用.杭州:浙江科学技术出版社,1990

32 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983

33 Arrowsmith D K, Place C M. Dynamical, Differemtial equations, maps and chaotic behaviour. London: Chapman & Hall, 1992

34 Putzer E J. Avoiding the Jordan Canonical form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients. American Mathematical Monthly, 1966, 73(1)

